मुंबई इलाख्यांतील सरकारी विद्याशाळाखातें.

युक्लिडकृत

भूमितीचीं पहिलीं चार पुस्तकें

(त्यांवर टिपणें, पुरवण्या, व प्रश्न, ह्यांसहित)

हा ग्रंथ

इंग्रजी ग्रंथांवरून

गोविंद विठ्ठल करकरे

व

कृष्णशास्त्री गोडबोले

ह्यांनीं मराठींत तयार केला.

आवृत्ति दुसरी—सहा हजार प्रती.

मुंबई.

गवर्नमेंत सेंत्रल बुक डिपो.

१८७६.

किंमत १० आणे.

मुंबईमध्यें
एड्युकेशन सोसैटीच्या छापखान्यांत छापिला.

अनुक्रमणिका.

सूचना.

ह्या ग्रंथाची पहिली आवृत्ति सन १८७४ मध्यें छापली. तिच्या सर्व प्रति खपल्यामुळें ही आवृत्ति छापतांना, प्रथमावृत्तींत राहिलेले किंवा पडलेले दृष्टिदोष किंवा हस्तदोष विशेषेंकरून नीट केले आहेत. खेरीज कितीएक स्थळीं थोडासा फेरही केला आहे.

मुंबई, सप्तंबर १८७६.

कृ. शा. गो.

प्रस्तावना.

गणितविद्येचा खरा पाया म्हटला म्हणजे **भूमिति** होय. कारण **भूमिति** शिकण्यापूर्वी **अंकगणित** आणि **बीजगणित** ह्यांची थोडी बहुत माहिती करून घेण्याची रीति आहे खरी, पण हे दोन विषय शिकतांना विद्यार्थ्यांचा बहुतेक काळ त्या विषयांतील नियम उदाहरणांस त्वरित लागू करण्याची सवय करण्यांतच जातो; परंतु भूमिति शिकतांना त्याचा सर्वकाळ विचारशक्तीची योजना करण्यांत जातो.

युरोपांतील आणि अर्थातच **हिंदुस्थानांतील** सर्व विद्यालयांत **युक्लिड-कृत भूमितीचींच** मूलतत्वें शिकवितात. ह्या पुस्तकाबदल दुसरें नवें पुस्तक चालू करण्याविषयीं बहुतांनीं यत्न केला आहे, परंतु त्यांस आज-पर्यंत ह्या कामांत यश आलें नाहीं. अशा महत्वाच्या विषयावर एकच सर्वसाधारण पुस्तक असल्यानें जो लाभ आहे तो सांगतां येत नाहीं. जर **युक्लिडकृत** ग्रंथ सोडून दिला, तर त्याबदल कोणाचा ग्रंथ चाल-वावा ह्याविषयीं मतैक्य होणें अशक्य आहे. हें खरें आहे कीं **युक्लिडाचे** ग्रंथांत व्यंगें व दोष आढळतात, आणि ते, ग्रंथ जितका सूक्ष्म विचारानें वाचावा तितके अधिक उघड होतात. परंतु अशा वाचनानें बहुधा हीही खातरी होईल कीं तीं व्यंगें आणि दोष बऱ्हंशीं विद्यमान विषयास अंगभूतच आहेत; आणि भूमितीचा दुसरा कोणताही ग्रंथ सूक्ष्म दृष्टीनें पाहिला असतां त्यांत ह्यांहीपेक्षां अधिक आणि बलवत्तर व्यंगें आणि दोष सांपडतील असें सहज मनांत येईल.

युक्लिडकृत भूमिति ग्रीक भाषेंत आहे. ती अनेकांनीं **युरोप-**खंडांतील भाषांत तयार करून छापली आहे. तयार केलेल्या त्या सर्व आवृत्तींत **राबर्ट सिमसनाचीच इंग्लंडांत** फार चालू आहे, आणि विद्यमान आवृत्ति बहुतकरून **सिमसनाचीच** आहे.

भूमिति शिकणारे बहुधा अल्पवयस्क असतात, म्हणून शिकतांना आरंभीं त्यांस ज्या अडचणी येतात त्या दूर होण्यास मदत होईल अशा

विषयांत चांगला प्रवेश होण्यास हीच रीति उत्तम म्हटली; आणि युक्लिडकृत ग्रंथाच्या नवीन कांहीं आवृत्तींत हीच रीति योजली आहे. ही नवीन आवृत्ति त्याच रीतीनें तयार केली आहे.

वरील लेखावरून ही गोष्ट लक्षांत येईल कीं ह्या आवृत्तींत प्रमाणांतील, प्रत्येक वेगवेगळी गोष्ट किंवा पायरी नव्या ओळींत दाखविली आहे; आणि त्या प्रमाणांस आधारभूत जे मागील नियम, सिद्धांत, व्याख्या, इत्यादि ते ओळींच्या शेवटीं दाखविले आहेत. खेरीज, लांब लांब सिद्धांताचे विभाग करून, ते स्पष्ट कळण्याकरितां वेगवेगळ्या कलमांनीं, म्हणजे ओळींच्या आरंभीं थोडी जागा सोडून लिहिले आहेत.

युक्लिड पहिल्या टालेमीच्या वेळीं म्हणजे इसवीसनापूर्वी ३२३–२८३ काळीं होता, आणि त्यानेंच **अलेग्झांद्रियामध्यें** गणितशाळा स्थापिली. त्याच्या **भूमितीचे** बारा विभाग आहेत; प्रत्येकास **पुस्तक** म्हणतात. पहिलीं सहा पुस्तकें एकाच पातळींत असणाऱ्या रेषांचे आणि आकृतींचे गुण दाखवितात; सातवें, आठवें, आणि नववें पुस्तक **अंकगणित**-विषयक आहेत; दहावें करणीरूप परिमाणांविषयीं म्हणजे ज्या परिमाणांचें मूळ (वर्गमूळ, घनमूळ, इ.) बराबर नसतें त्यांविषयीं आहे; आणि अकरावें आणि बारावें पुस्तक **भरीव भूमितीविषयीं** आहेत, म्हणजे त्यांत भिन्न पातळींत असणाऱ्या रेषांचे आणि आकृतींचे गुण सांगितले आहेत. पण (इंग्रजी) भूमिति ग्रंथांत पहिलीं सहा आणि शेवटचीं दोन मात्र असतात; कारण **अंकगणित** आणि **बीजगणित** हे ग्रंथ सांप्रत वेगळे आहेत.

मुंबई युनिवर्सिटीचे प्रवेशपरीक्षेस **युक्लिडकृत** चारच पुस्तकें लागतात, आणि पहिल्या प्रतीच्या सरकारी **मराठी** शाळांत चारच पुस्तकें शिकविण्याबदल ठराव झाला आहे; म्हणून ह्या **मराठी** ग्रंथांत चारच पुस्तकांचा संग्रह केला आहे.

ह्या विद्येचा उपयोग जमिनीची लांबी, रुंदी, आणि क्षेत्रफळ काढ-

वयाचें असतें, आणि प्रमेयांत कांहीं नवीन गोष्ट खरी आहे म्हणून सांगावयाचें असतें. प्रत्येक सिद्धांतांत किती एक भाग असतात. कृत्याचें किंवा प्रमेयाचें सामान्य **कथन** प्रथम असतें; जसें, 'दिलेल्या समर्याद रेघेवर समभुज त्रिकोण करावयाचें (कृत्य),' किंवा 'त्रिकोणाचे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांहून कमी असतात' (प्रमेय). सामान्य कथनानंतर तेंच विशेष आकृतीचे संबंधानें पुनः सांगितलें असतें. जसें, 'अब दिलेली रेघ आहे; आणि तीवर एक समभुज त्रिकोण करावयाचा आहे'. नंतर रचना बहुधा येते; म्हणजे कृत्याची किंवा प्रमेयाची सिद्धता किंवा उपपादन करण्यासाठीं आवश्यक ज्या रेघा आणि वर्तुळें तीं काढण्यांत येतात. आणि शेवटीं कृत्य पुरें झालें आहे किंवा प्रमेय खरें आहे असें सिद्ध करून दाखविलें असतें.

परंतु कधीं कधीं रचना मुळींच लागत नाहीं; आणि कधीं कधीं रचना आणि सिद्धता ह्या एकदमच येतात.

सिद्धांतांत **पूर्वपक्ष** आणि **उत्तरपक्ष** असे दोन असतात. पूर्वपक्षास **प्रतिज्ञा** म्हणतात आणि उत्तरपक्षास **अनुमान** म्हणतात.

पूर्वी आणून ठेवलेल्या सिद्ध गोष्टींपासून अनुमानें काढण्याच्या रीतीस **सिद्धता** म्हणतात. ह्या सिद्ध गोष्टींत कांहीं, मागील सिद्धांतांत आणून ठेवलेल्या असतात, किंवा उघड म्हणजे प्रमाणाची गरज न बाळगणाऱ्या अशा विषयांसंबंधीं सांगितलेल्या असतात; आणि कांहीं, केलेल्या रचनेवरूनच निघणाऱ्या किंवा सिद्धांताच्या प्रतिज्ञेंत सांगितलेल्या असतात.

सिद्धता करतांना मागील ज्या गोष्टी येतात त्या, विद्यार्थ्यांस कळाव्या म्हणून ओळीच्या शेवटीं दिल्या आहेत. जसें, १.८, म्हणजे पहिल्या पुस्तकाच्या ८ वे सिद्धांतांत सिद्ध केलेल्या गोष्टीप्रमाणें; प्र. प्र. ७ म्हणजे ७ वे प्रत्यक्ष प्रमाणावरून. किती एक स्थळीं संबंधसूचक गोष्टी संक्षेपानेंही दाखविल्या आहेत, पण ते संक्षेप सहज कळण्याजोगे आहेत.

ह्या ग्रंथांत सरळ रेघा, त्यांनीं झालेले कोन, आणि आकृति ह्या विषयींच मुख्यत्वें विचार आहे म्हणून सरळ रेघा, सरळकोन किंवा सरलरेषाकोन, आणि सरलरेषाकृति ह्यांबदल प्रायः रेघ, कोन, आणि आकृति हे शब्द योजले आहेत. पाया आणि शिरकोन हे शब्द सापेक्ष आहेत. आकृति ज्या रेघेवर आहे असें मानावें ती रेघ तिचा पाया होय; आणि त्रिकोणांत पाया समोरील कोन शिरकोन होय.

युक्लिडकृत भूमितीच्या चार पुस्तकांतील व्यंगें आणि दोष, त्यांचें निरसन, आणि सिद्धांतांपासून निघणारीं अत्युपयुक्त अनुमानें हीं विद्यार्थ्यांस कळण्याकरितां मूळ पुस्तकां नंतर टिपणांत दिलीं आहेत. टिपणां नंतर मागील सिद्धांतांस जोड म्हणून किती एक उपयुक्त सिद्धांत पुरवणींत देऊन, शेवटीं प्रश्नसमुदाय दिला आहे. प्रश्नसमुदायांत सोंपे सोंपे प्रश्न बहुत आहेत; आणि ते सोडवितांना ज्या सिद्धांतांची मदत विशेषेंकरून लागते ते आरंभीं लिहिले आहेत.

युक्लिडकृत भूमिति.

पहिलें पुस्तक.

व्याख्या.

१. ज्यास स्थिति मात्र आहे, परंतु परिमाण नाहीं, त्यास **बिंदु** म्हणतात.

२. ज्यास रुंदी नाहीं, व लांबी मात्र आहे, त्यास **रेघ** म्हणतात.

३. रेघेचीं टोंकें बिंदु असतात.

४. शेवटाकडील दोन बिंदूंच्या मध्यें जी रेघ एकसारखी असते, तीस **सरळ रेघ** म्हणतात.

५. ज्यास लांबी व रुंदी मात्र असतात, त्यास **पातळी** म्हणतात.

६. पातळीचीं शेवटें रेघा असतात.

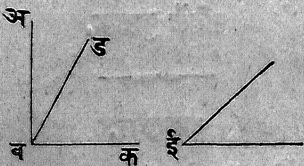
७. ज्या पातळीवर कोठेंही दोन बिंदु घेतले असतां, त्यांच्या मधील सरळ रेघ सर्वांशीं पातळींत असते, त्या पातळीस **सरळ पातळी** म्हणतात.

८. एका पातळींतील एका दिशेंत नसणाऱ्या दोन रेघा परस्पर मिळाल्या असतां, त्यांच्या मध्यें जी वक्रता असते, तीस पातळींतील **कोन** म्हणतात.

९. एका सरळ रेघेंत नसणाऱ्या दोन सरळ रेघा परस्पर मिळाल्या असतां, त्यांच्या मध्यें जी वक्रता असते, तीस **सरलरेषाकोण** म्हणतात.

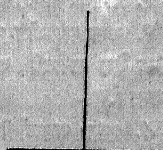
ज्या रेघांच्या मध्यें कोन असतो त्या रेघांस त्याच्या बाजू म्हणतात; आणि त्या ज्या बिंदूंत मिळतात, त्या बिंदूस **कोणबिंदु** म्हणतात. जसें, अब आणि बड रेघा ब बिंदूशीं मिळून अबड कोन करितात; तर अब आणि बड ह्या रेघा अबड कोनाच्या बाजू होत, व ब हा

कोणबिंदु होय. कोनाच्या बाजूंस संज्ञा देण्याकरितां जीं तीन अक्षरें योजितात त्याच तीन अक्षरांनीं कोनास ही संज्ञा देण्याची चाल आहे, परंतु कोणबिंदूवर लिहिलेलें अक्षर मात्र मध्यें आणितात. जसें, **अब**



आणि **बड** ह्या दोन रेषांच्या मधील कोनास **अबड** किंवा **डबअ** कोन म्हणतात; व **बड** आणि **बक** ह्या रेषांच्या मधील कोनास **डबक** किंवा **कबड** कोन म्हणतात; व **अब** आणि **बक** ह्या रेषांच्या मधील कोनास **अबक** किंवा **कबअ** कोन म्हणतात.

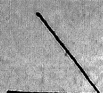
एका बिंदूंत एकच कोन झाला असला, तर तो एका अक्षरानें दाखविला असतां चालतें. जसें, **ई**कोन.



१०. एक रेघ दुसरे रेषेवर उभी असतां होणारे दोन कोन जेव्हां परस्पर बराबर असतात, तेव्हां त्यांपैकीं प्रत्येकास **काटकोन** म्हणतात, आणि जी रेघ उभी असते तीस **लंब** म्हणतात.



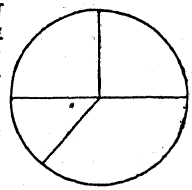
११. जो कोन काटकोनापेक्षां मोठा असतो त्यास **विशाळ कोन** म्हणतात.



१२. जो कोन काटकोनापेक्षां लहान असतो त्यास **लघु कोन** म्हणतात.

१३. वस्तूच्या शेवटास **मर्यादा** म्हणतात.

१४. ज्या सभोंवतीं एक किंवा अधिक मर्यादा असतात त्यास **आकृति** म्हणतात.



१५. जी आकृति एका वक्ररेषेनें वेष्टित असते व जीमध्यें असा एक बिंदु असतो, कीं त्यापासून वक्ररेषेपर्यंत काढलेल्या सर्व रेघा एकमेकीं बराबर असतात त्या आकृतीस **वर्तुळ** म्हणतात; व त्या वेष्टणाऱ्या वक्ररेषेस **परिघ** म्हणतात.

१६. आणि त्या बिंदूस वर्तुळाचा **मध्यबिंदु** किंवा **वर्तुलमध्य** म्हणतात.

१७. जी रेघ वर्तुलमध्यांतून जाऊन परिघास दोन्ही अंगांनीं मिळते त्या रेषेस वर्तुळाचा **व्यास** म्हणतात.

वर्तुळाच्या मध्यापासून परिघा पर्यंत काढलेल्या रेषेस **त्रिज्या** म्हणतात.

१८. व्यास व त्यानें छेदलेला परिघाचा भाग ह्या दोहोंच्या मध्यें जो वर्तुळाचा भाग सांपडतो, त्यास **अर्धवर्तुळ** म्हणतात.

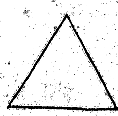
१९. वर्तुळाच्या परिघास छेदणारी सरळ रेघ आणि तिनें छेदलेला परिघाचा भाग ह्यांच्या मधील आकृतीस **वर्तुळभाग** म्हणतात.

२०. ज्या आकृति सरळ रेषांनीं झाल्या असतात त्यास **सरलरेषाकृति** म्हणतात.

२१. तीन सरळ रेषांनीं जी आकृति होते तीस **त्रिभुज** किंवा **त्रिकोण** म्हणतात.

२२. चार सरळ रेषांनीं जी आकृति होते तीस **चतुर्भुज** किंवा **चौकोन** म्हणतात.

२३. चहूंपेक्षां अधिक सरळ रेषांनीं जी आकृति होते तीस **बहुरेषाकृति** किंवा **बहुकोणाकृति** म्हणतात.



२४. ज्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू बराबर असतात त्यास **समभुज त्रिकोण** म्हणतात.

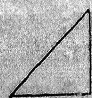


२५. ज्या त्रिकोणाच्या दोन बाजू बराबर असतात त्यास **समद्विभुज त्रिकोण** म्हणतात.

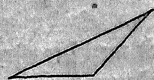
२६. ज्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू बराबर नसतात त्यास **विषमभुज** त्रिकोण म्हणतात.



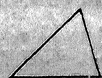
२७. ज्या त्रिकोणाचा कोणता तरी एक कोन काटकोन असतो त्यास **काटकोन त्रिकोण** म्हणतात, व काटकोनासमोरील बाजूस **कर्ण** म्हणतात.



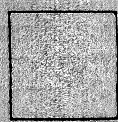
२८. ज्या त्रिकोणामध्यें कोणता तरी एक कोन काटकोनाहून मोठा असतो त्यास **विशालकोणत्रिकोण** म्हणतात.



२९. ज्या त्रिकोणाचे तिन्ही कोन काटकोनाहून कमी असतात त्यास **लघुकोणत्रिकोण** म्हणतात.



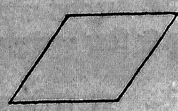
३०. ज्या चौकोनाच्या चारही बाजू सारख्या असून, चारही कोन काटकोन असतात त्यास **चौरस** म्हणतात.



३१. ज्या चौकोनाचे चारही कोन काटकोन असतात, परंतु सर्व बाजू सारख्या नसतात त्यास **काटकोन चौकोन** म्हणतात.



३२. ज्या चौकोनाच्या सर्व बाजू सारख्या असतात, परंतु कोन काटकोन नसतात त्यास **समभुज चौकोन** (राम्बस) म्हणतात.

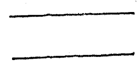


३२. ज्या चौकोनाच्या समोरासमोरील बाजू सारख्या असतात, पण सर्व बाजू बराबर नसतात व सर्व कोन काटकोन नसतात त्यास **समांतरभुज चौकोन** (राम्बाईड) म्हणतात.



३४. वर सांगितलेल्या आकृतींशिवाय जितक्या चार बाजूंच्या आकृति आहेत त्यांस **विषमभुज चौकोन** (त्रापिजम) म्हणतात.

चौकोनांत समोरासमोरील कोन सांधणाऱ्या रेषेस **कर्णरेषा** म्हणतात.



३५. ज्या दोन सरळ रेषा एका पातळींत असून, दोन्ही अंगांस कितीही वाढविल्या असतां एकमेकीस मिळत नाहींत त्यांस **समांतर रेषा** म्हणतात.

ज्या चौकोनाच्या समोरासमोरच्या बाजू समांतर असतात त्यास **समांतरभुज चौकोन** म्हणतात.

गृहीत गोष्टी.

असें मानलें आहे कीं,

१. एका बिंदूपासून दुसऱ्या बिंदूपर्यंत सरळ रेघ काढितां येते.

२. कोणतीही समर्याद सरळ रेघ पुढें तशीच पाहिजे तितके अंतरापर्यंत वाढवितां येते.

३. आणि कोणताही बिंदु मध्य कल्पून त्यापासून कोणत्याही अंतरानें वर्तुल काढितां येतें.

प्रत्यक्ष प्रमाणें.

१. ज्या वस्तु एका वस्तूशीं बराबर असतात त्या परस्पर बराबर असतात.

२. समवस्तूंत समवस्तु मिळविल्या असतां, बेरजा सम होतात.

३. समवस्तूंतून समवस्तु वजा केल्या असतां, बाक्या सम राहतात.

४. विषमवस्तूंत समवस्तु मिळविल्या असतां, बेरजा विषम होतात.

५. विषमवस्तूंतून समवस्तु वजा केल्या असतां, बाक्या विषम राहतात.

६. ज्या वस्तु दुसऱ्या एकाच वस्तूच्या दुपट असतात त्या परस्पर बराबर असतात.

७. ज्या वस्तु दुसऱ्या एकाच वस्तूच्या अर्धा बराबर असतात त्या परस्पर बराबर असतात.

८. ज्या आकृति सर्वांशीं परस्परांशीं मिळतात, म्हणजे एकच जागा व्यापून राहतात त्या परस्पर बराबर असतात.

९. सगळी वस्तु आपले अंशापेक्षां मोठी असते.

१०. दोन सरळ रेषा नियमित जागा व्यापीत नाहींत.

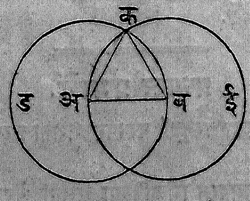
११. सर्व काटकोन परस्पर बराबर असतात.

१२. जर एक सरळ रेघ दुसऱ्या दोन सरळ रेघांस अशी मिळते किंवा छेदिते, कीं तिच्या एकाच बाजूकडील त्या दोन रेघांशीं तिनें झालेल्या आंतील दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांहून कमी आहे, तर त्या दोन रेघा त्याच बाजूकडे वाढविल्या असतां शेवटीं मिळतात.

सिद्धांत १. कृत्य.

एका समर्याद दिलेल्या सरळ रेघेवर समभुज त्रिकोण काढावयाचें.

बअ दिलेली समर्याद सरळ रेघ आहे, तीवर समभुज त्रिकोण काढावयाचा आहे.



अ मध्य कल्पून, अब त्रिज्येनें बकड वर्तुळ काढ. (गृ. गो. ३)
आणि बमध्य कल्पून बअ त्रिज्येनें अकई वर्तुळ काढ. (गृ. गो. ३)
आणि ह्या वर्तुळांच्या क छेदन बिंदूपासून अ आणि ब बिंदूंपर्यंत कअ, कब रेघा काढ. (गृ. गो. १)
म्हणजे अबक समभुज त्रिकोण होईल.

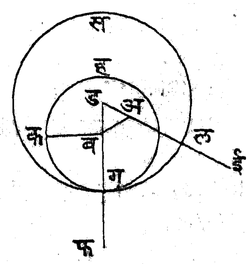
कारण, बकड वर्तुळाचा अ मध्यबिंदु आहे, म्हणून अक, अब बराबर आहे. (व्याख्या १५)
आणि अकई वर्तुळाचा ब मध्यबिंदु आहे, म्हणून बक, बअ बराबर आहे. (व्याख्या १५)
परंतु अक, अब बराबर आहे,
म्हणून अक आणि बक प्रत्येकीं अब बराबर आहेत. (प्र. प्र. १)
ह्यास्तव अब, अक, बक, ह्या परस्पर बराबर आहेत.

ह्याकरितां, **अबक** हा समभुज त्रिकोण आहे, (व्याख्या २४) व तो अब रेघे वर काढला आहे.

सिद्धांत २. कृत्य.

दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या रेघे एवढी रेघ काढावयाचें.

अ दिलेला बिंदु आहे, व बक दिलेली रेघ आहे; तर अ बिंदू पासून बकएवढी रेघ काढावयाची आहे.



अ बिंदूपासून ब बिंदूपर्यंत अब रेघ काढ; (गृ. गो. १)
आणि अब रेघेवर अबड समभुज त्रिकोण कर, (१.१)
आणि डअ, डब रेघा, ई आणि फ बिंदूपर्यंत वाढीव. (गृ. गो. २)
ब मध्यापासून बक अंतरानें कगह वर्तुळ काढ, म्हणजे तें डफ रेघेस ग बिंदूंत मिळेल. (गृ. गो. ३)
आणि ड मध्यापासून डग अंतरानें गसल वर्तुळ काढ, म्हणजे तें डई ला ल बिंदूंत मिळेल. (गृ. गो. ३)
म्हणजे अल रेघ बक रेघे बराबर होईल.

कारण, ब बिंदु कगह वर्तुळाचा मध्य आहे, ह्यास्तव बक रेघ बग रेघे बराबर आहे. (व्याख्या १५)
आणि ड बिंदु गसल वर्तुळाचा मध्य आहे, म्हणून डल रेघ डग रेघे बराबर आहे. (व्याख्या १५)

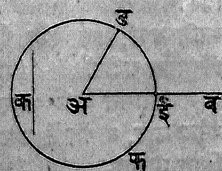
आणि डअ, डब हे दोन त्यांचे भाग परस्पर बराबर आहेत,
(व्याख्या २४)
ह्याकरितां शेष भाग अल, शेष बग भागा बराबर आहे.
(प्र. प्र. ३)
परंतु पूर्वीं सिद्ध केलें आहे कीं बक आणि बग परस्पर बराबर आहेत,
ह्याकरितां बक आणि अल ह्या रेघा प्रत्येकीं बग शीं बराबर आहेत,
म्हणून अल रेघ बक रेघे बराबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्याकरितां, दिलेल्या अ बिंदूपासून अल रेघ दिलेल्या बक रेघे बराबर काढली आहे.

सिद्धांत ३. कृत्य.

दिलेल्या दोन विषम रेघां पैकीं मोठ्या रेघेचा लहान रेघे एवढा तुकडा पाडावयाचें.

अब आणि क ह्या दिलेल्या दोन विषम रेघा आहेत, त्यांमध्यें अब रेघ क रेघे पेक्षां मोठी आहे; तर क लहान रेघे एवढा अब रेघेचा तुकडा पाडावयाचा आहे.



अ बिंदूपासून क रेघेएवढी अड रेघ काढ, (१. २)
आणि अ मध्यापासून अड अंतरानें डईफ वर्तुळ काढ, (गृ. गो. ३)
म्हणजे तें अबस ई बिंदूंत छेदील;
अई रेघ क रेघे बराबर होईल.

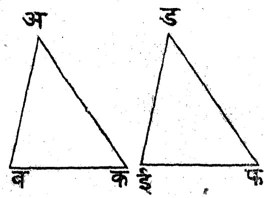
कारण, अ बिंदु डईफ वर्तुळाचा मध्य आहे, म्हणून अई रेघ अड रेघे बराबर आहे. (व्याख्या १५)
पण क, अड बराबर आहे. (रचना)
म्हणून अई आणि क ह्या रेघा प्रत्येकीं अड बराबर आहेत.
ह्यास्तव अई रेघ क रेघे बराबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्याकरितां, अब मोठ्या रेघेचा अई तुकडा अ लहान रेघे एवढा पाडला आहे.

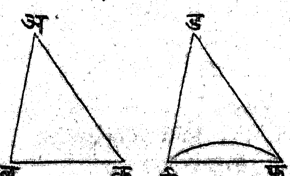
सिद्धांत ४. प्रमेय.

जर दोन त्रिकोणांत एकाच्या दोन बाजू व त्यांच्या मधील कोन हीं दुसऱ्याच्या दोन बाजू व त्यांच्या मधील कोन ह्यांशीं प्रत्येकीं बराबर असतील, तर त्यांच्या तिसऱ्या बाजू अथवा पाये बराबर होतील; आणि ते दोन त्रिकोण बराबर होतील, व त्यांचे दुसरे कोन म्हणजे सारख्या बाजूं समोरील कोन बराबर होतील.

जर अबक आणि डईफ ह्या दोन त्रिकोणांत पहिल्याच्या अब आणि अक ह्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या डई आणि डफ ह्या दोन बाजूंशीं प्रत्येकीं बराबर आहेत, आणि अब आणि अक ह्या दोन बाजूंच्या मधील बअक कोन, डई आणि डफ ह्यांच्या मधील ईडफ कोना बराबर आहे; तर अबक त्रिकोणाची तिसरी बाजू बक, डईफ त्रिकोणाच्या तिसऱ्या ईफ बाजू बराबर होईल, आणि हे दोन त्रिकोण बराबर होतील, आणि बअ बाजूसमोरील क कोन, बअच्या बराबरीच्या डई बाजूसमोरील फ कोना बराबर होईल, व अक बाजू समोरील ब कोन डफ बाजू समोरील ई कोना बराबर होईल.



कारण, जर अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणावर असा ठेविला, कीं अ बिंदु ड बिंदूवर पडेल, आणि अब रेघ डई रेघेवर पडेल, तर ब बिंदु ई बिंदूवरच पडेल, कारण अब रेघ डई रेघे बराबर आहे, (प्रतिज्ञा) आणि अब रेघ डई रेघेशीं मिळून गेली आहे, ह्यास्तव अक, डफशीं मिळून जाईल; कारण बअक कोन ईडफ कोना बराबर आहे. (प्रतिज्ञा)
आणि क बिंदु फ बिंदूशीं मिळेल. कारण अक बाजू डफ बाजू बराबर आहे. (प्रतिज्ञा)



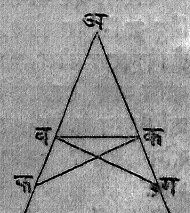
परंतु ब बिंदु ई बिंदूशीं मिळतो असें वरतीं दर्शविलें आहे, ह्यास्तव बक पाया ईफ पायाशीं मिळेल;
कारण, ब बिंदु ई बिंदूशीं आणि क बिंदु फ बिंदूशीं मिळाले असून, जर बक रेघ ईफ रेघेशीं मिळणार नाहीं, तर त्या दोन रेघांच्या मध्यें अवकाश सांपडेल, पण ही गोष्ट होणें अशक्य आहे. (प्र. प्र. १०)
म्हणून बक पाया ईफ पायाशीं मिळतो व त्या बराबर आहे. (प्र. प्र. ८)
ह्यास्तव सगळा अबक त्रिकोण सगळे डईफ त्रिकोणाशीं मिळतो व त्या बराबर आहे. (प्र. प्र. ८)
आणि एका त्रिकोणाचे बाकीचे कोन प्रत्येकीं दुसऱ्या त्रिकोणाच्या बाकीच्या कोनां बराबर आहेत, म्हणजे अबक कोन डईफ कोनां बराबर, आणि अकब कोन डफई कोना बराबर आहे.

ह्याकरितां, जर दोन त्रिकोणांत इत्यादि.

सिद्धांत ५. प्रमेय.

समद्विभुज त्रिकोणांत पायाकडील म्हणजे समभुजां समोरील कोन बराबर असतात; व समभुज वाढविले असतां, पायाच्या दुसऱ्या अंगास जे कोन पडतात तेही परस्पर बराबर असतात.

जर अबक समद्विभुज त्रिकोणाच्या अब आणि अक ह्या दोन बाजू परस्पर बराबर आहेत, व ह्या बाजू ड आणि ई ह्या बिंदू पर्यंत अनुक्रमें वाढविल्या आहेत; तर अबक कोन अकब कोना बराबर होईल, व कबड कोन बकई कोना बराबर होईल.



बड रेघेंत एक फ बिंदु घे, आणि मोठ्या अई रेघेचा अग तुकडा लहान अफ रेघे एवढा पाड, (१. ३)
आणि कफ, गब सांध.
अफ बाजू अग बाजू बराबर आहे, (रचना)
व अब, अक बराबर आहे, (प्रतिज्ञा)
म्हणून फअ, अक ह्या दोन बाजू प्रत्येकीं गअ, अब ह्या दोन बाजू बराबर आहेत; आणि त्यांच्या मधील

फअग कोन, अफक आणि अगब ह्या दोन त्रिकोणांस साधारण आहे.
म्हणून पहिल्याची तिसरी बाजू किंवा पाया फक दुसऱ्याच्या गब पाया बराबर आहे, आणि हे दोनही त्रिकोण बराबर आहेत, आणि सारख्या बाजूंसमोरील कोन प्रत्येकीं बराबर आहेत, म्हणजे अकफ कोन अबग कोना बराबर, आणि अफक कोन अगब कोना बराबर आहे. (१.४)

आणि सर्व अफ बाजू सर्व अग बाजू बराबर आहे, व त्यांचे तुकडे अब, अक हेही बराबर आहेत, (प्रतिज्ञा)
म्हणून शेष बफ, शेष कग बराबर आहे. (प्र. प्र. ३)
आणि फक, गब बराबर आहे असें वरतीं सिद्ध केलें आहे.
म्हणून बफ, फक ह्या दोन बाजू प्रत्येकीं कग, गब ह्या दोन बाजूं बराबर आहेत;
आणि बफक कोन कगब कोना बराबर आहे असें वर दाखविलें आहे.

म्हणून बफक व कगब हे दोन त्रिकोण बराबर आहेत, आणि सारख्या बाजूं समोरील त्यांचे दुसरे कोन प्रत्येकीं बराबर आहेत, म्हणजे फबक कोन गकब कोना बराबर आहे, आणि बकफ कोन गबक कोना बराबर आहे. (१.४)

आणि वरतीं दाखविलें आहे कीं सर्व अबग कोन सर्व अकफ कोना बराबर आहे,
आणि त्यांचे भाग कबग, बकफ हे कोनही बराबर आहेत;
म्हणून शेष अबक कोन, शेष अकब कोना बराबर आहे, व हे अबक समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायाकडील कोन आहेत. (प्र. प्र. ३)

आणि हेंही वरतीं सिद्ध केलें आहे कीं फबक कोन गकब कोना बराबर आहे, व ते बक पायाच्या दुसऱ्या बाजूकडचे आहेत.

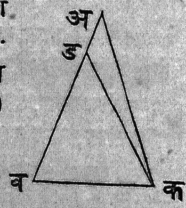
ह्याकरितां, समद्विभुज इत्यादि.

कुरलरी. प्रत्येक समभुज त्रिकोण समकोण असतो ही गोष्ट वरील सिद्धांतावरून उघडच आहे.

सिद्धांत ६. प्रमेय.

त्रिकोणांत दोन कोन परस्पर बराबर असले, तर त्यांसमोरील बाजूही परस्पर बराबर असतात.

अबक त्रिकोणांत अबक कोन अकब कोना बराबर आहे, तर अक बाजू अब बाजू बराबर होईल.



कारण, जर अब, अक बराबर नाहीं, तर त्या दोहीं पैकीं एक, दुसरी पेक्षां मोठी असली पाहिजे.

अब मोठी मान, आणि तिचा डब भाग धाकट्या अक बराबर कर, (१. ३)
आणि डक सांध.
तेव्हां डबक, अकब ह्या दोन त्रिकोणांत,
डब, अक बराबर आहे, (रचना)
आणि बक दोघांस साधारण आहे,
म्हणून डब, बक ह्या दोन बाजू प्रत्येकीं अक, कब ह्या दोन बाजूं बराबर आहेत;
आणि डबक कोन अकब कोना बराबर आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून डबक त्रिकोण अकब त्रिकोणा बराबर आहे, (१.४)
म्हणजे धाकटा त्रिकोण मोठ्या त्रिकोणा बराबर आहे, पण हें होणें अशक्य आहे. (प्र. प्र. ९)
म्हणून अब, अक बराबर नाहीं, असें नाहीं म्हणजे ती अक बराबर आहे.

ह्याकरितां, त्रिकोणांत दोन कोन इत्यादि.

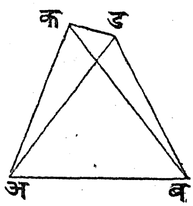
कुरलरी. म्हणून प्रत्येक समकोण त्रिकोण समभुजही असतो.

सिद्धांत ७. प्रमेय.

एकाच पायावर आणि त्याच्या एकाच अंगास असे दोन त्रिकोण कधींही होणार नाहींत कीं पायाच्या प्रत्येक टोकांत संपणाऱ्या त्यांच्या बाजू बराबर होतील.

जर एकाच अब पायावर आणि त्याच्या एकाच अंगास असे दोन

त्रिकोण होणें शक्य असेल, तर असें समज कीं ते दोन त्रिकोण **अकब** आणि **अडब** हे आहेत, आणि पायाच्या **अ** टोकांत संपणाऱ्या **कअ**, **डअ** ह्या त्यांच्या बाजू परस्पर बराबर आहेत, व **ब** टोकांत संपणाऱ्या **कब**, **डब** ह्या बाजू परस्पर बराबर आहेत.



जेव्हां एका त्रिकोणाचा शिरबिंदु दुसऱ्या त्रिकोणांत नसतो, तेव्हां **कड** सांध.

अक, **अड** बराबर आहे. (प्रतिज्ञा)

म्हणून **अकड** कोन **अडक** कोनाबराबर आहे. (१.५)

परंतु **अकड** कोन **बकड** कोनाहून मोठा आहे, (प्र. प्र. ९)

म्हणून **अडक** कोनही **बकड** कोनाहून मोठा आहे;

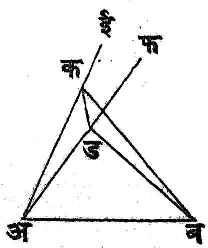
आणि अर्थांतच **बडक** कोन **बकड** कोनाहून फारच मोठा आहे.

पुनः, **बक**, **बड** बराबर आहे, (प्रतिज्ञा)

म्हणून **बडक** कोन **बकड** कोना बराबर आहे. (१.५)

परंतु पहिला दुसऱ्याहून मोठा आहे असें सिद्ध केलें आहे; व हें होणें अशक्य आहे.

परंतु जर एका त्रिकोणाचा शिरबिंदु **ड** दुसऱ्या **अकब** त्रिकोणांत असेल, तर **अक**, **अड** ह्या बाजू अनुक्रमें **ई** व **फ** बिंदूं पर्यंत वाढीव.



तेव्हां **अकड** त्रिकोणांत **अक**, **अड** बराबर आहे, (प्रतिज्ञा)

म्हणून **कड** पायाच्या दुसऱ्या बाजूकडील **ईकड** व **फडक** हे कोन परस्पर बराबर आहेत. (१.५)

परंतु **ईकड** कोन **बकड** कोनाहून मोठा आहे, (प्र. प्र. ९)

म्हणून **फडक** कोनही **बकड** कोनाहून मोठा आहे;

आणि अर्थांतच **बडक** कोन, **बकड** कोनाहून फारच मोठा आहे.

पुनः, **बक**, **बड** बराबर आहे, (प्रतिज्ञा)

म्हणून बडक कोन बकड कोना बराबर आहे. (१.५)
परंतु पहिला दुसऱ्याहून मोठा आहे असें वरतीं दाखविलें आहे, आणि हें होणें अशक्य आहे.

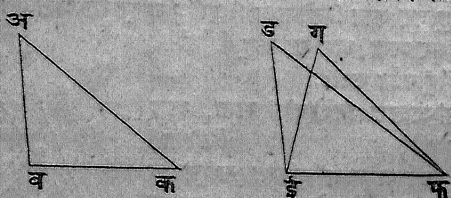
जेव्हां एका अबड त्रिकोणाचा ड शिरबिंदु दुसऱ्या अबक त्रिकोणाच्या एका बक बाजूंत असतो, तेव्हां प्रतिज्ञेस विरोध येतो ह्याविषयीं सिद्धतेची गरज नाहीं.

ह्याकरितां, एकाच पायावर इत्यादि.

सिद्धांत ८. प्रमेय.

जर दोन त्रिकोणांत एकाच्या दोन बाजू प्रत्येकीं दुसऱ्याच्या दोन बाजूंबराबर असून, त्यांचे पायेही बराबर असतील, तर पहिल्याच्या त्या दोन बाजूंच्या मधील कोन, त्या बराबरीच्या दुसऱ्याच्या दोन बाजूंच्या मधील कोनाबराबर होईल.

अबक आणि डईफ ह्या दोन त्रिकोणांत अब, अक ह्या दोन बाजू प्रत्येकीं डई, डफ ह्या दोन बाजूंबराबर आहेत; म्हणजे अब, डई बराबर, आणि अक, डफ बराबर आहे, आणि बक पाया ईफ पायाबराबर आहे तर बअक कोन ईडफ कोना बराबर होईल.



कारण, जर अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणावर असा ठेविला, कीं ब बिंदु ई बिंदूवर पडेल, आणि बक रेघ ईफ रेघेवर पडेल, तर क बिंदु फ बिंदूशीं मिळेल, कारण बक रेघ ईफ रेघे बराबर आहे. (प्रतिज्ञा) आतां बक, ईफ शीं मिळाल्यामुळें अब, अक ह्या बाजू डई, डफ ह्या बाजूंशीं मिळतील.

कारण, जर बक पाया ईफ पायाशीं मिळाला असून, बअ, कअ

ह्या बाजू ईड, फड ह्या बाजूंशीं मिळत नाहींत, परंतु ईग, फग ह्या वेगळ्या स्थानीं आहेत, तर ही गोष्ट होणें अशक्य आहे. (१. ७)

म्हणजे, बक पाया ईफ पायाशीं मिळतो, म्हणून बअ, अक ह्या बाजू ईड, डफ ह्या बाजूंशीं मिळाल्या पाहिजेत.

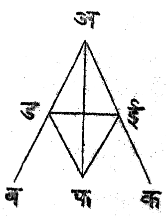
म्हणून बअक कोन ईडफ कोनाशीं मिळतो, व त्या बराबर आहे. (प्र. प्र. ८)

ह्याकरितां, दोन त्रिकोणांत इत्यादि.

सिद्धांत ९. कृत्य.

दिलेल्या कोनाचे दोन समान भाग करावयाचें.

बअक एक दिलेला कोन आहे; त्याचे दोन समान भाग करावयाचे आहेत.



अब रेषेंत ड बिंदु घे, आणि अक चा अई तुकडा अड एवढा पाड; (१. ३) डई सांध, आणि डई बाजूवर अ बिंदूपासून दूरच्या अंगास डईफ समभुज त्रिकोण कर. (१. १)

अफ सांध, म्हणजे अफ रेघ बअक कोनाचे दोन समान भाग करील.

कारण अड रेघ अई रेघे बराबर आहे, (रचना)

आणि अफ रेघ डअफ व ईअफ ह्या दोन त्रिकोणांस साधारण आहे,

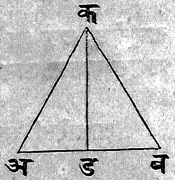
म्हणून डअ, अफ ह्या बाजू ईअ, अफ ह्या बाजूंशीं अनुक्रमें बराबर आहेत; आणि डफ पाया ईफ पाया बराबर आहे; (व्याख्या २४)

म्हणून डअफ कोन ईअफ कोना बराबर आहे. (१. ८)

ह्याकरितां, अफ रेषेनें दिलेला बअक कोन दुभागला आहे, म्हणजे त्याचे दोन समान भाग केले आहेत.

सिद्धांत १०. कृत्य.

दिलेल्या समर्याद रेषेचे दोन समान भाग करावयाचें.



अब एक दिलेली समर्याद रेष आहे, तिचे दोन समान भाग करावयाचे आहेत.

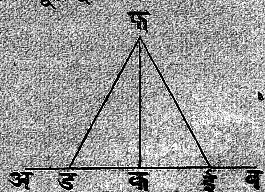
अब बाजूवर अबक समभुज त्रिकोण कर, (१.१)
आणि अकब कोन कड रेषेनें दुभागून, (१.९)
ती अब रेषेला ड बिंदूंत मिळे पर्यंत वाढीव;
म्हणजे ड बिंदूंत अब रेषेचे दोन समान भाग होतील.

कारण अक, बक बराबर आहे, (व्याख्या २४)
आणि कड रेष अकड आणि बकड ह्या दोन त्रिकोणांस साधारण आहे,
ह्यास्तव अक, कड ह्या बाजू बक, कड ह्या बाजूंशीं अनुक्रमें बराबर आहेत;
आणि अकड कोन बकड कोना बराबर आहे; (रचना)
म्हणून अड पाया बड पाया बराबर आहे. (१.४)

ह्याकरितां, ड बिंदूंत दिलेल्या अब रेषेचे दोन समान भाग झाले आहेत.

सिद्धांत ११. कृत्य.

दिलेल्या रेषेवर तींतील दिलेल्या बिंदूपासून लंब काढावयाचें.



अब एक दिलेली रेष आहे, आणि तींतील दिलेला बिंदु क आहे; त्यापासून तीवर लंब काढावयाचा आहे.

अक रेषेमध्यें दुसरा एक ड बिंदु घे, आणि कई, कड बराबर कर. (१.३)
डई रेषेवर डफई समभुज त्रिकोण कर, (१.१)
आणि कफ सांध.

म्हणजे क बिंदूपासून काढलेली कफ रेघ अब रेघेवर लंब होईल.

कारण कड, कई बराबर आहे. (रचना)

आणि कफ रेघ डकफ व ईकफ ह्या दोन त्रिकोणांस साधारण आहे.

ह्यास्तव डक, कफ ह्या बाजू ईक, कफ ह्या बाजूंशीं अनुक्रमें बराबर आहेत;

आणि डफ पाया ईफ पाया बराबर आहे; (व्याख्या २४)

म्हणून डकफ कोन ईकफ कोनाबराबर आहे, (१.८)

ह्यास्तव डकफ आणि ईकफ हे दोन कोन प्रत्येकीं काटकोन आहेत; (व्याख्या १०)

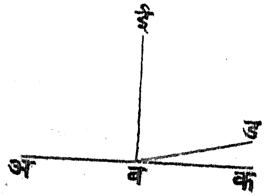
ह्याकरितां, दिलेल्या अब रेघेवर नींतील क दिलेल्या बिंदूपासून कफ लंब काढला आहे.

कुरलरी. ह्या सिद्धांताच्या साहय्यानें असें सिद्ध करतां येतें, कीं दोन मिळणाऱ्या रेघांस साधारण खंड असत नाहीं.

जर हें होणें शक्य असेल,

तर असें समज, कीं अबड आणि अबक ह्या मिळणाऱ्या रेघांस अब खंड साधारण आहे.

अब वर ब पासून बई लंब काढ.



तेव्हां अबक ही सरळ रेघ आहे, (प्रतिज्ञा)

म्हणून कबई कोन ईबअ कोना बराबर आहे; (व्याख्या १०)

आणि अबड हीही सरळ रेघ आहे, (प्रतिज्ञा)

म्हणून डबई कोन ईबअ कोना बराबर आहे. (व्याख्या १०)

म्हणून डबई कोन कबई कोना बराबर आहे, (प्र. प्र. १)

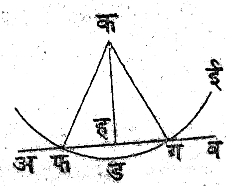
म्हणजे तुकडा सगळे कोना बराबर आहे, व हें होणें अशक्य आहे. (प्र. प्र. ९)

ह्याकरितां, दोन मिळणाऱ्या रेघांस साधारण खंड असत नाहीं.

सिद्धांत १२. कृत्य.

दिलेल्या अमर्याद रेघेवर तीबाहेरील दिलेल्या बिंदूपासून लंब काढावयाचें.

अब एक दिलेली अमर्याद रेघ आहे, म्हणजे ती दोन्ही बाजूंस हवी तितकी वाढवतां येते, व तीबाहेर क एक दिलेला बिंदु आहे; तर क पासून अब वर लंब काढावयाचा आहे.



अब बाजूच्या दुसऱ्या अंगास एक ड बिंदु घे, आणि क मध्यापासून कड अंतरानें फगई वर्तुळ काढ, म्हणजे तें अब रेघेला फ आणि ग ह्या बिंदूंत छेदील. (गृ. गो. ३)

फग रेघेचे ह स्थळीं दोन समान भाग कर, (१.१०)

आणि कह सांध;

म्हणजे क बिंदूपासून काढलेली कह रेघ अब रेघे वर लंब होईल.

कफ आणि कग सांध. (रचना)

तेव्हां फह, हग बराबर आहे,

आणि हक रेघ फहक व गहक ह्या दोन त्रिकोणांस साधारण आहे;

म्हणून फह, हक रेघा गह, हक रेघांशीं अनुक्रमें बराबर आहेत;

आणि कफ पाया, कग पाया बराबर आहे; (व्याख्या १५)

ह्यास्तव कहफ कोन कहग कोना बराबर आहे. (१.८)

परंतु ते जवळ जवळचे कोन आहेत,

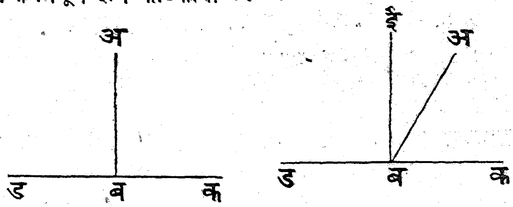
म्हणून त्यांतील प्रत्येक कोन काटकोन आहे, (व्याख्या १०)

ह्याकरितां, दिलेल्या अब रेघेवर तीबाहेरील क दिलेल्या बिंदूपासून कह रेघ लंब काढली आहे.

सिद्धांत १३. प्रमेय.

एक रेघ दुसऱ्या रेघेस मिळाली असतां, तिच्या एके अंगास जे दोन कोन होतात, ते प्रत्येकीं काटकोन असतात, किंवा ते दोन मिळून दोन काटकोनां बराबर असतात.

जर अब रेघ, कड रेघेस मिळून तिचे एके अंगास कबअ आणि अबड कोन करिते; तर हे दोन कोन प्रत्येकीं काटकोन आहेत, किंवा ते मिळून दोन काटकोनां बराबर आहेत.

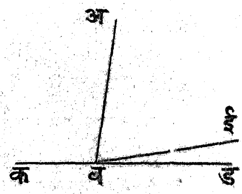


कारण, जर कबअ कोन अबड कोना बराबर आहे, तर त्या पैकीं प्रत्येक काटकोन आहे, (व्याख्या १०)
परंतु जर ते परस्पर बराबर नाहींत, तर ब बिंदूंतून कड रेघेवर बई लंब कर; (१.११)
म्हणून कबई, ईबड हे दोन कोन दोन काटकोन आहेत; (व्याख्या १०)
आतां कबई कोन, कबअ आणि अबई ह्या दोन कोनां बराबर आहे;
बरोबरीच्या ह्या प्रत्येकांत ईबड कोन मिळीव;
म्हणून कबई, ईबड हे दोन कोन, कबअ, अबई, ईबड ह्या तीन कोनां बराबर आहेत. (प्र. प्र. २)
पुनः, डबअ कोन, डबई आणि ईबअ ह्या दोन कोनां बराबर आहे;
बरोबरीच्या ह्या प्रत्येकांत अबक कोन मिळीव;
म्हणून डबअ, अबक हे दोन कोन, डबई, ईबअ, आणि अबक ह्या तीन कोनां बराबर आहेत. (प्र. प्र. २)
परंतु कबई, ईबड हे दोन कोन ह्याच तीन कोनां बराबर आहेत असें सिद्ध केलें आहे;

म्हणून कबई, ईबड हे दोन कोन, डबअ, अबक ह्या दोन कोनां बराबर आहेत. (प्र. प्र. १)
परंतु कबई, ईबड हे दोन कोन दोन काटकोन आहेत ;
म्हणून डबअ, अबक हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांबराबर आहेत.
ह्याकारितां, एक रेघ इत्यादि.

सिद्धांत १४. प्रमेय.

एका रेषेंतील एका बिंदूशीं समोरासमोरील बाजूंकडून दुसऱ्या दोन रेघा येऊन झालेले जवळ जवळचे कोन मिळून जर दोन काटकोनां बराबर असले, तर त्या दोन रेघा एकाच सरळ रेषेंत होतील.



अब रेषेंतील ब बिंदूशीं समोरासमोरील बाजू कडून बक, बड रेघा येऊन झालेले अबक आणि अबड हे जवळ जवळचे कोन मिळून दोन काटकोनां बराबर आहेत; तर बक आणि बड एकाच सरळ रेषेंत होतील.

कारण, जर बक आणि बड एकाच सरळ रेषेंत नसतील, म्हणजे बक वाढविल्यास ती बड रेषेंतून जात नसली तर ती, बई रेषेंतून जाते, म्हणजे कबई ही एक सरळ रेघ आहे असें समज.
तेव्हां अब रेघ कबई रेषेस मिळून, तिच्या एका अंगास झालेले अबक आणि अबई कोन दोन काटकोनां बराबर आहेत. (१.१३)
परंतु अबक आणि अबड हेही दोन कोन मिळून दोन काटकोन बराबर आहेत. (प्रतिज्ञा)
म्हणून अबक व अबई हे दोन कोन, अबक आणि अबड ह्या दोन कोनां बराबर आहेत.
बराबरीच्या ह्या प्रत्येकांतून साधारण कोन अबक काढून टाक ;
म्हणून शेष अबई कोन, शेष अबड कोनां बराबर आहे ; (प्र. प्र. ३)
परंतु पहिला दुसऱ्याचा तुकडा आहे, म्हणून ते परस्पर बराबर असणें हें अशक्य आहे.

म्हणून कब आणि बई, एकाच सरळ रेषेंत नाहींत.

आणि ह्याच रीतीनें असें दाखवितां येईल, कीं बड खेरीज कोणतीही रेघ कबच्या सरळ रेषेंत नाहीं, म्हणजे कब वाढविल्यानें जी सरळ रेघ होते तींत येत नाहीं;

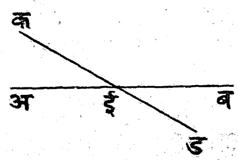
म्हणून कब, बड ह्या रेघा एकाच सरळ रेषेंत आहेत.

ह्याकरितां, एका रेषेंतील इत्यादि.

सिद्धांत १५. प्रमेय.

जेव्हां दोन रेघा एकमेकीस कापतात, तेव्हां समोरा समोरचे कोन बरावर होतात.

अब, कड ह्या दोन रेघा एकमेकीस ई बिंदूशीं कापतात, तर अईक कोन, बईड कोना बरावर होईल, आणि कईब कोन, अईड कोना बरावर होईल.



कारण अई रेघ कड रेषेस मिळून जे कईअ आणि अईड कोन होतात ते मिळून दोन काटकोनां बरावर आहेत. (१. १३)

पुनः, डई रेघ अई रेषेस मिळून जे अईड आणि डईब कोन होतात ते मिळून दोन काटकोनां बरावर आहेत. (१. १३)

परंतु असें वर दाखविलें आहे कीं कईअ व अईड हे कोन मिळून दोन काटकोनां बरावर आहेत.

म्हणून कईअ आणि अईड हे दोन कोन, अईड आणि डईब ह्या दोन कोनां बरावर आहेत.

बरावरीच्या ह्या प्रत्येकांतून साधारण कोन अईड काढून टाक;

म्हणून शेष कईअ कोन शेष डईब कोना बरावर आहे. (प्र. प्र. ३)

वरील रीतीनेंच असें दाखवितां येईल, कीं कईब कोन, अईड कोना बरावर आहे.

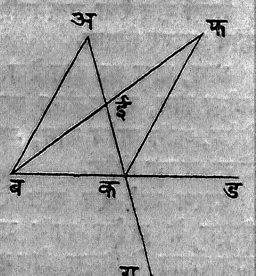
ह्याकरितां, जेव्हां दोन रेघा इत्यादि.

कुरलरी १. वरील सिद्धांता वरून हें उघड आहे, कीं जर दोन रेषा एकमेकीस कापतात, तर छेदनबिंदूशीं जे चार कोन होतात ते मिळून चार काटकोनां बराबर असतात.

कुरलरी २. आणि हेंही उघड आहे, कीं एका बिंदूंत मिळणाऱ्या अनेक सरळ रेषांनीं झालेले सर्व कोन मिळून चार काटकोनां बराबर असतात.

सिद्धांत १६. प्रमेय.

जर त्रिकोणाची एक बाजू वाढविली, तर बाहेरील कोन, आंतील कोना समोरील प्रत्येक कोना पेक्षां मोठा होतो.



अबक एक त्रिकोण आहे, आणि त्याची बक बाजू ड पर्यंत वाढविली आहे; तर बाहेरील अकड कोन, आंतील अकब कोना समोरील अबक किंवा बअक कोना पेक्षां मोठा होईल.

अक बाजूचे ई बिंदूंत दोन समान भाग कर, (१.१०)
बई सांध, आणि ती वाढवून, ईफ, ईब बराबर कर, (१. ३)
आणि फक सांध.

आतां, अई बाजू ईक बाजू बराबर आहे, आणि बई, ईफ बराबर आहे. (रचना)
ह्यास्तव अई, ईब ह्या बाजू कई, ईफ ह्या बाजूंशीं अनुक्रमें बराबर आहेत; आणि अईब कोन, कईफ कोना बराबर आहे, कारण ते समोरासमोरचे कोन आहेत; (१. १५)
म्हणून अईब त्रिकोण कईफ त्रिकोणा बराबर आहे, आणि त्याचे बराबरीच्या बाजूसमोरील दुसरे कोन परस्पर बराबर आहेत; (१. ४)
म्हणून बअई कोन, ईकफ कोना बराबर आहे.
परंतु ईकड कोन, ईकफ कोना पेक्षां मोठा आहे. (प्र. प्र. ९)

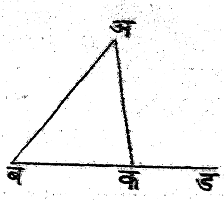
म्हणून अकड कोन बअई कोना पेक्षां मोठा आहे.

जर बक बाजूचे दोन समान भाग करून अक बाजू ग पर्यंत वाढविली, तर वरील प्रमाणेंच असें दाखवितां येईल कीं बकग कोन किंवा त्याच्या बराबरीचा अकड कोन, अबक कोनापेक्षां मोठा आहे.

ह्याकरितां, जर त्रिकोणाची एक बाजू इत्यादि.

सिद्धांत १७. प्रमेय.

त्रिकोणाचे कोणतेही दोन कोन मिळून दोन काटकोनां पेक्षां कमी असतात.



अबक त्रिकोणाचे कोणतेही दोन कोन मिळून दोन काटकोनां पेक्षां कमी आहेत.

बक बाजू ड पर्यंत वाढीव.

तेव्हां अबक त्रिकोणाचा अकड कोन बाहेरील आहे, ह्यास्तव तो अबक कोना पेक्षां मोठा आहे. (१.१६)

ह्यांतील प्रत्येक कोना मध्यें अकब कोन मिळीव.

म्हणून अकड आणि अकब हे दोन कोन, अबक आणि अकब ह्या दोन कोनांपेक्षां मोठे आहेत.

परंतु अकड आणि अकब हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बराबर आहेत. (१.१३)

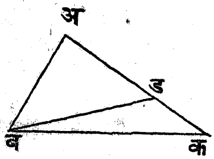
म्हणून अबक आणि अकब हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां पेक्षां कमी आहेत.

ह्याप्रमाणेंच असें दाखवितां येईल कीं अकब आणि बअक हे दोन कोन मिळून, आणि तसेच अबक आणि बअक हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांपेक्षां कमी आहेत.

ह्याकरितां, त्रिकोणाचे कोणतेही इत्यादि.

सिद्धांत १८. प्रमेय.

प्रत्येक त्रिकोणांत महत्तर बाजू समोर महत्तर कोन असतो.



अबक एक त्रिकोण आहे, आणि त्याची अक बाजू अब बाजू पेक्षां मोठी आहे; तर अक समोरील अबक कोन, अब समोरील अकब कोना पेक्षां मोठा होईल.

अक बाजू अब बाजू पेक्षां मोठी आहे, म्हणून अब एवढा अकचा अड तुकडा पाड, (१. ३)
आणि बड सांध.

तेव्हां, अडब हा बडक त्रिकोणाचा बाहेरील कोन आहे, ह्यास्तव तो आंतील कोना समोरील बकड कोना पेक्षां मोठा आहे. (१. १६)
परंतु अडब कोन, अबड कोना बराबर आहे, (१. ५)
कारण, अड बाजू अब बाजू बराबर आहे. (रचना)
म्हणून अबड कोनही बकड म्हणजे अकब कोना पेक्षां मोठा आहे.
पण अबड कोन, अबक कोनाचा तुकडा आहे, म्हणून तो, अकब कोना पेक्षां फारच मोठा आहे.

ह्याकरितां, प्रत्येक त्रिकोणांत महत्तर इत्यादि.

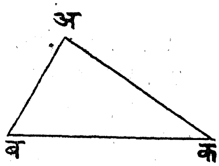
सिद्धांत १९. प्रमेय.

प्रत्येक त्रिकोणांत महत्तर कोनासमोर महत्तर बाजू असते.

अबक एक त्रिकोण आहे, आणि त्याचा अबक कोन, अकब कोना पेक्षां मोठा आहे; तर अबक कोना समोरील अक बाजू, अकब कोना समोरील अब बाजू पेक्षां मोठी होईल.

कारण, जर अक बाजू अब बाजू पेक्षां मोठी नसेल, तर ती अब बराबर असावी, अथवा अब पेक्षां कमी असावी. परंतु अक बाजू अब बराबर नाहीं; कारण, तेव्हां अबक कोन अकब कोना बराबर होईल; (१. ५)
पण ही गोष्ट अशक्य आहे, (प्रतिज्ञा)

म्हणून अक, अब बरोबर नाहीं.
पुनः, अक, अब पेक्षां लहानही नाहीं; कारण, लहान असल्यास अबक कोन अकब कोनापेक्षां लहान होईल; (१.१८) पण हीही गोष्ट अशक्य आहे; (प्रतिज्ञा) म्हणून अक बाजू अब बाजू पेक्षां लहान नाहीं.

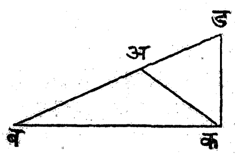


आणि अक, अब बरोबर नाहीं असें तर वर दाखविलेंच आहे.
ह्यास्तव अक बाजू अब बाजू पेक्षां मोठी आहे.
ह्याकरितां, प्रत्येक त्रिकोणांत इत्यादि.

सिद्धांत २०. प्रमेय.

त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजू मिळून तिसऱ्या बाजूपेक्षां अधिक असतात.

अबक त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजू मिळून तिसऱ्या बाजू पेक्षां अधिक आहेत; म्हणजे, अब आणि बक मिळून अक पेक्षां अधिक आहेत, आणि बअ आणि अक मिळून बक पेक्षां अधिक आहेत, आणि अक आणि कब मिळून अब पेक्षां अधिक आहेत.



बअ बाजू वाढवून,
अड रेघ अक रेघे बरोबर कर, (१.३)
आणि डक, सांध.
तेव्हां अड, अक बरोबर आहे, (रचना)
म्हणून अडक कोन, अकड कोना बरोबर आहे, (१.५)
पण बकड कोन अकड कोना पेक्षां मोठा आहे, (प्र. प्र. ९)
म्हणून बकड कोन, बडक कोना पेक्षां मोठा आहे.
आणि बकड त्रिकोणाचा बकड कोन, बडक कोना पेक्षां मोठा आहे,
ह्यास्तव बड बाजू बक बाजू पेक्षां मोठी आहे. (१.१९)

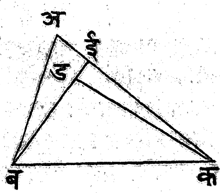
परंतु बड, बअ आणि अक मिळून झाली आहे,
म्हणून बअ व अक मिळून बक पेक्षां अधिक आहेत.

ह्याप्रमाणेंच असें दाखवितां येईल कीं अब, बक मिळून अक पेक्षां अधिक आणि बक, कअ मिळून अब पेक्षां अधिक आहेत.

ह्याकरितां, त्रिकोणाच्या कोणत्याही इत्यादि.

सिद्धांत २१. प्रमेय.

जर त्रिकोणाच्या एका बाजूच्या टोकांपासून त्रिकोणांतील कोणत्याही एका बिंदू पर्यंत दोन रेषा काढल्या, तर त्या, त्रिकोणाच्या दुसऱ्या दोन बाजूं पेक्षां कमी असतात, परंतु त्यांच्या मधील कोन दुसऱ्या दोन बाजूंच्या मधील कोनापेक्षां मोठा असतो.



अबक त्रिकोणाच्या बक बाजूच्या ब, क ह्या दोन बिंदूंपासून त्रिकोणांतील ड बिंदूपर्यंत बड, डक रेषा काढल्या आहेत; तर त्या, त्रिकोणाच्या बअ आणि अक ह्या दुसऱ्या दोन बाजू पेक्षां कमी होतील, परंतु त्यांच्या मधील बडक कोन, बअक कोना पेक्षां मोठा होईल.

बड वाढवून, ती अक ला ई बिंदूंत मिळीव.

तेव्हां अबई त्रिकोणाच्या बअ व अई बाजू, बई बाजू पेक्षां अधिक आहेत. (१.२०)

ह्यांतील प्रत्येकास ईक मिळीव.

म्हणून बअ व अक बाजू, बई व ईक बाजूं पेक्षां अधिक आहेत,

पुनः, कईड त्रिकोणाच्या कई व ईड बाजू, कड बाजू पेक्षां अधिक आहेत. (१.२०)

ह्यांतील प्रत्येकास डब मिळीव.

म्हणून कई आणि ईब बाजू, कड आणि बड बाजू पेक्षां अधिक आहेत;

परंतु असें सिद्ध केलें आहे कीं बअ आणि अक बाजू, बई आणि ईक बाजूंहून अधिक आहेत;

म्हणून बअ व अक बाजू, बड व डक बाजूंहून फारच अधिक आहेत.

पुनः, कडई त्रिकोणाचा बाहेरील बडक कोन, आंतील कोना समोरील कईड कोनाहून मोठा आहे. (१. १६)

आणि असेंच, अबई त्रिकोणाचा बाहेरील कईब कोन, बअई कोनाहून अधिक आहे. (१. १६)

परंतु बडक कोन, कईब कोनाहून मोठा आहे असें वर दाखविलें आहे;

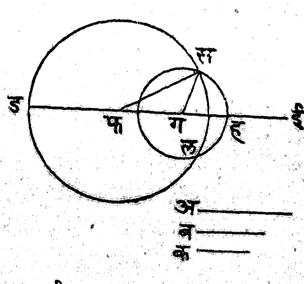
म्हणून बडक कोन बअक कोनाहून फारच अधिक आहे.

ह्याकरितां, जर त्रिकोणाच्या एका बाजूच्या इत्यादि.

सिद्धांत २२. कृत्य.

दिलेल्या तीन रेघां पैकीं कोणत्याही दोन तिसरी पेक्षां अधिक आहेत, अशा तीन रेघांबरावर ज्या त्रिकोणाच्या बाजू होतील असा एक त्रिकोण करावयाचें.

अ, ब, क, ह्या तीन दिलेल्या रेघा अशा आहेत कीं त्यांतील कोणत्याही दोन तिसरीहून अधिक आहेत; म्हणजे अ आणि ब, क हून अधिक; अ आणि क, ब हून अधिक; आणि ब आणि क, अ हून अधिक आहेत; तर ज्या त्रिकोणाच्या बाजू प्रत्येकीं अ, ब, क, ह्यांबराबर होतील असा एक त्रिकोण करावयाचा आहे.



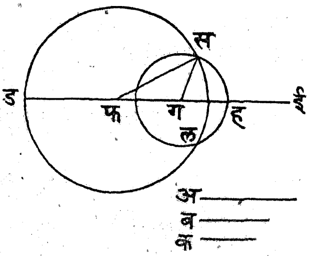
ड बिंदूंत संपलेली, परंतु ई बिंदूकडे अमर्याद अशी एक डई सरळ रेघ काढ; आणि डफ, अ बराबर; फग, ब बराबर; आणि गह, क बराबर कर. (१.३)

फ मध्यापासून फड अंतरानें डसल वर्तुळ काढ. (गृ. गो. ३)

ग मध्यापासून गह अंतरानें हलस वर्तुळ काढ; (गृ. गो. ३)

म्हणजे तें पहिल्या वर्तुळास स, ल बिंदूंत कापील.

सफ, सग सांध. सफग त्रिकोणाच्या तीन बाजू अ, ब, क, ह्या दिलेल्या रेषां बराबर होतील.



डसल वर्तुळाचा मध्य बिंदु फ आहे,

म्हणून फड, फस बराबर आहे. (व्याख्या १५)

परंतु फड, अ बराबर आहे. (रचना)

म्हणून फस, अ बराबर आहे. (प्र. प्र. १)

पुनः हलस वर्तुळाचा मध्य बिंदु ग आहे,

म्हणून गह, गस बराबर आहे. (व्याख्या १५)

परंतु गह, क बराबर आहे. (रचना)

म्हणून गस, क बराबर आहे. (प्र. प्र. १)

आणि फग, ब बराबर आहे; (रचना)

म्हणून सफ, फग, गस ह्या तीन बाजू अ, ब, क ह्या तीन रेषां बराबर आहेत.

ह्याकरितां, **सफग** त्रिकोणाच्या तीन बाजू **सफ, फग, गस** दिलेल्या **अ**, ब, **क** ह्या तीन रेषां बराबर आहेत.

सिद्धांत २३. कृत्य.

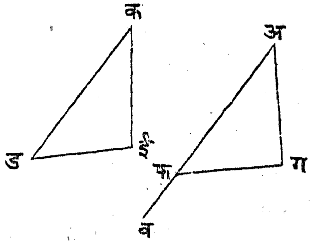
दिलेल्या रेषेंत दिलेल्या बिंदूशीं दिलेल्या कोना एवढा कोन करावयाचें.

अब एक दिलेली रेष आहे, आणि तींत अ एक दिलेला बिंदु आहे, आणि डकई दिलेला कोन आहे; तर अब रेषेंतील अ बिंदूशीं डकई कोना एवढा कोन करावयाचा आहे.

कड, कई, ह्या रेषांत ड आणि ई बिंदु घे, आणि डई सांध; कड, डई, आणि ईक ह्या तीन बाजूं बराबर ज्याच्या बाजू होतील म्हणजे अफ बाजू कड बाजू बराबर, अग बाजू कई बाजू बराबर

आणि फग बाजू डई बाजू बराबर होईल असा अफग त्रिकोण कर; (१.२२)
म्हणजे फअग कोन डकई कोना बराबर होईल.

आतां, फअ, अग बाजू अनुक्रमें डक, कई बाजूं बराबर आहेत;
आणि फग पाया डई पाया बराबर आहे. (रचना)



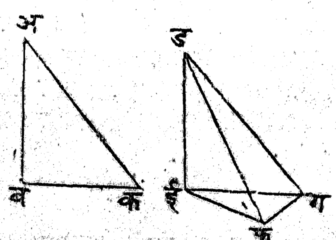
म्हणून फअग कोन डकई कोनाबराबर आहे. (१.८)

ह्याकरितां, दिलेल्या अब रेषेंत दिलेल्या अ बिंदूशीं फअग कोन, दिलेल्या डकई कोना बराबर केला आहे.

सिद्धांत २४. प्रमेय.

जर दोन त्रिकोणांत एकाच्या दोन बाजू प्रत्येकीं दुसऱ्याच्या दोन बाजूं बराबर आहेत, परंतु पहिल्या दोन बाजूंच्या मधील कोन, त्यां बराबरीच्या दुसऱ्या दोन बाजूंच्या मधील कोनापेक्षां अधिक आहे; तर पहिल्या त्रिकोणाची मोठ्या कोना समोरील तिसरी बाजू किंवा पाया, दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तिसऱ्या बाजू पेक्षां किंवा पाया पेक्षां अधिक होईल.

अबक आणि डईफ ह्या दोन त्रिकोणांत अब आणि अक बाजू, डई, डफ बाजूं बराबर आहेत; म्हणजे अब, डई बराबर, आणि अक, डफ बराबर आहे; परंतु बअक कोन, ईडफ कोनापेक्षां मोठा आहे; तर बक पाया ईफ पायाहून मोठा होईल.

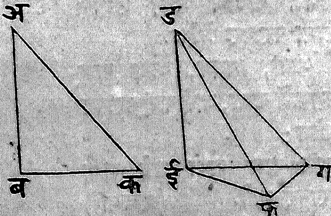


डई आणि डफ ह्या दोन बाजूं पैकीं डई बाजू डफ पेक्षां मोठी

नाहीं असें मान; आणि डई रेषेंत ड बिंदूशीं ईडग कोन बअक कोना एवढा कर, (१.२३)

आणि डग बाजू अक किंवा डफ बाजू बराबर कर, (१.३)

आणि ईग, गफ सांध.



तेव्हां अब, डई बराबर आहे, (प्रतिज्ञा)

आणि अक, डग बराबर आहे; (रचना)

म्हणून बअ, अक ह्या दोन बाजू ईड, डग ह्या दोन बाजूंशीं अनुक्रमें बराबर आहेत;

आणि बअक कोन ईडग कोना बराबर आहे; (रचना)

ह्यास्तव बक पाया ईग पाया बराबर आहे. (१.४)

पुनः, डग बाजू डफ बाजू बराबर आहे, (रचना)

म्हणून डगफ कोन डफग कोना बराबर आहे. (१.५)

परंतु डगफ कोन ईगफ कोना पेक्षां मोठा आहे, (प्र. प्र. ९)

म्हणून डफग कोन ईगफ कोना पेक्षां मोठा आहे,

आणि अर्थांत ईफग कोन ईगफ कोनापेक्षां फारच मोठा आहे. (प्र. प्र. ९)

ईफग त्रिकोणामध्यें ईफग कोन ईगफ कोनापेक्षां मोठा आहे. ह्यास्तव ईग बाजू ईफ बाजूपेक्षां मोठी आहे. (१.१९)

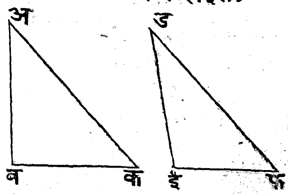
परंतु ईग बाजू बक बाजू बराबर आहे असें वर दाखविलें आहे; म्हणून बक बाजू ईफबाजू पेक्षां मोठी आहे.

ह्याकरितां, जर दोन त्रिकोणांत इत्यादि.

सिद्धांत २५. प्रमेय.

जर दोन त्रिकोणांत एकाच्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या दोन बाजूंशीं अनुक्रमें बराबर आहेत, परंतु पहिल्याचा पाया दुसऱ्या-

च्या पायापेक्षां मोठा आहे, तर पहिल्या त्रिकोणाच्या पाया समोरील कोन (म्हणजे दुसऱ्या दोन बाजूंच्या मधील कोन) दुसऱ्या त्रिकोणाच्या पायासमोरील कोनापेक्षां मोठा होईल.



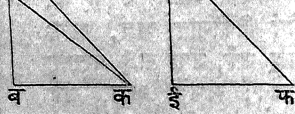
अबक आणि डईफ ह्या दोन त्रिकोणांत अब, अक बाजू डई, डफ बाजूं बराबर आहेत; म्हणजे अब, डई बराबर, आणि अक, डफ बराबर आहे; परंतु बक पाया ईफ पाया पेक्षां मोठा आहे; तर बअक कोन ईडफ कोनापेक्षां मोठा होईल.

कारण, जर बअक कोन ईडफ कोनापेक्षां मोठा नसेल, तर बअक कोन, ईडफ कोना बराबर, किंवा ईडफ कोनाहून लहान असावा.
परंतु बअक कोन ईडफ कोना बराबर नाहीं, कारण, तसें झाल्यास
बक बाजू ईफ बाजू बराबर होईल; (१.४)
पण ही गोष्ट अशक्य आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून बअक कोन ईडफ कोना बराबर नाहीं.
असेंच, बअक कोन ईडफ कोना पेक्षां लहानही नाहीं,
कारण, तसें झाल्यास बक बाजू ईफ बाजू पेक्षां लहान होईल; (१.२४)
पण हीही गोष्ट अशक्य आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून बअक कोन ईडफ कोना पेक्षां लहान नाहीं;
आणि बअक कोन ईडफ कोना बराबर नाहीं असें वर दाखविलेंच आहे,
म्हणून बअक कोन ईडफ कोना पेक्षां मोठा आहे.

ह्याकरितां, जर दोन त्रिकोणांत इत्यादि.

सिद्धांत २६. प्रमेय.

जर दोन त्रिकोणांत एकाचे दोन कोन प्रत्येकीं दुसऱ्याच्या दोन कोनां बराबर आहेत; आणि प्रत्येकांतील दोहों बराबर कोनांच्या मधील एकेक बाजू किंवा दोहोंतून एका बराबर कोनां समोरील एकेक बाजू परस्पर बराबर आहेत; तर पहिल्या त्रिकोणाच्या



त्रिकोणांत अबक, बकअ हे दोन कोन प्रत्येकीं डईफ, ईफड ह्या दोन कोनां बराबर आहेत; म्हणजे अबक कोन डईफ कोना बराबर, आणि बकअ कोन ईफड कोना बराबर आहे; आणि प्रथमतः दोहीं त्रिकोणांतील सारख्या कोनांच्या मधील बाजू म्हणजे बक, ईफ परस्पर बराबर आहेत; तर दुसऱ्या बाजू प्रत्येकीं बराबर होतील, म्हणजे अब, डई बराबर, आणि अक, डफ बराबर होईल, आणि अबक त्रिकोणाचा तिसरा बअक कोन डईफ त्रिकोणाच्या तिसऱ्या ईडफ कोना बराबर होईल.

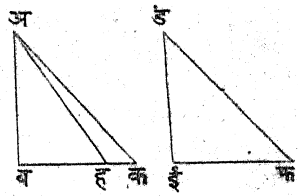
कारण, जर अब, डई बराबर नसेल, तर त्यांपैकीं एक दुसरी-पेक्षां मोठी असली पाहिजे. अब मोठी आहे असें समजून बग, डई बराबर कर, (१.३)
आणि गक सांध.

तेव्हां गब, डई बराबर आहे, (रचना)
आणि बक, ईफ बराबर आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून गब, बक ह्या दोन बाजू प्रत्येकीं डई, ईफ ह्या दोन बाजूं बराबर आहेत;
आणि गबक कोन डईफ कोना बराबर आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून गबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणा बराबर आहे, आणि त्यांचे बराबर बाजूं समोरील कोनही परस्पर बराबर आहेत; (१.४)
म्हणून गकब कोन डफई कोना बराबर आहे.
परंतु डफई कोन अकब कोना बराबर आहे. (प्रतिज्ञा)
म्हणून गकब कोन अकब कोना बराबर आहे. (प्र. प्र. १)
म्हणजे लहान कोन मोठ्या कोना बराबर आहे, व हें होणें अशक्य आहे.
म्हणून अब, डई बराबर नाहीं असें नाहीं,

तर ती डई बराबर आहे.
आणि बक, ईफ बराबर आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून अब, बक ह्या दोन बाजू प्रत्येकीं डई, ईफ ह्या दोन बाजूं बराबर आहेत;
आणि अबक कोन डईफ कोना बराबर आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून अक पाया डफ पाया बराबर, आणि तिसरा बअक कोन तिसऱ्या ईडफ कोना बराबर आहे. (१.४)

आतां, जर प्रत्येक त्रिकोणांत एका सारख्या कोना समोरील बाजू परस्पर बराबर आहेत, म्हणजे अब, डई बराबर आहे; तर देखील दुसऱ्या बाजू प्रत्येकीं बराबर होतील, म्हणजे बक, ईफ बराबर आणि अक, डफ बराबर होईल, आणि तिसरा बअक कोन तिसऱ्या ईडफ कोना बराबर होईल.

कारण, जर बक, ईफ बराबर नसेल, तर त्यां पैकीं एक दुसरी पेक्षां मोठी असली पाहिजे.
बक मोठी समज,
आणि बह, ईफ बराबर कर. (१.३)
आणि अह सांध.



तेव्हां बह, ईफ बराबर आहे, (रचना)
आणि अब, डई बराबर आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून अब, बह ह्या दोन बाजू प्रत्येकीं डई, ईफ ह्या दोन बाजूं बराबर आहेत;
आणि अबह कोन डईफ कोना बराबर आहे, (प्रतिज्ञा)
म्हणून अबह त्रिकोण डईफ त्रिकोणा बराबर आहे, आणि बहअ कोन ईफड कोना बराबर आहे. (१.४)
परंतु ईफड कोन बकअ कोना बराबर आहे, (प्रतिज्ञा)
म्हणून बहअ कोन बकअ कोना बराबर आहे; (प्र.प्र. १)
म्हणजे अहक त्रिकोणाचा बाहेरील बहअ कोन आंतील कोनासमोरील बकअ कोना बराबर आहे.

(१.२६)

पण हें होणें अशक्य आहे.
म्हणून बक, ईफ बराबर नाहीं असें नाहीं,
तर ती ईफ बराबर आहे;
आणि अब, डई बराबर आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून अब, बक ह्या बाजू प्रत्येकीं डई, ईफ ह्या बाजूं बराबर आहेत;
आणि अबक कोन डईफ कोना बराबर आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून अक पाया डफ पाया बराबर आहे, आणि तिसरा बअक कोन तिसऱ्या ईडफ कोना बराबर आहे. (१.४)

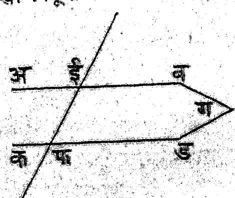
ह्याकरितां, जर दोन त्रिकोणांत इत्यादि.

सिद्धांत २७. प्रमेय.

जर एका रेषेनें दुसऱ्या दोन रेषांस छेदून, व्युत्क्रम कोन बराबर होतात, तर त्या दोन रेषा परस्पर समांतर असतात.

अब आणि कड ह्या दोन रेषांस ईफ रेषेनें छेदून अईफ आणि ईफड हे दोन व्युत्क्रम कोन बराबर होतात; तर अब रेष कड रेषेशीं समांतर होईल.

कारण, जर अब रेष कड रेषेशीं समांतर नसेल, तर ह्या दोन रेषा वाढविल्या असतां ब आणि ड ह्या बिंदूंकडे, किंवा अ आणि क ह्या बिंदूंकडे मिळतील. त्या ब आणि ड ह्या बिंदूंकडे वाढविल्या असतां ग बिंदूंत मिळतात असें समज.



म्हणून गईफ हा एक त्रिकोण आहे, आणि त्याचा बाहेरील अईफ कोन त्याच्या आंतल्या कोना समोरील ईफग कोनापेक्षां मोठा आहे; (१.१६)
परंतु अईफ कोन ईफग कोना बराबर आहे; (प्रतिज्ञा)
आणि हें होणें अशक्य आहे.
ह्यास्तव अब आणि कड रेषा ब आणि ड ह्या बिंदूंकडे वाढविल्या असतां मिळत नाहींत.

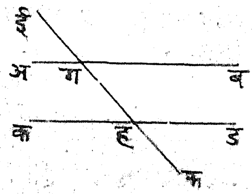
ह्याप्रमाणेंच, त्या रेषा अ आणि क ह्यांकडें वाढविल्या असतांही मिळत नाहींत, असें दाखवितां येईल.

म्हणून अब रेघ कड रेघेशीं समांतर आहे. (व्याख्या ३५)
ह्याकरितां, जर एका रेघेनें इत्यादि.

सिद्धांत २९. प्रमेय.

जर एका रेघेनें दुसऱ्या दोन रेघांस छेदून, बाहेरील कोन त्याच बाजूकडील आंतील कोना समोरील कोना बरोबर होतो, किंवा एकाच बाजूकडील दोनही आंतील कोन मिळून दोन काटकोनां-बरोबर होतात तर त्या दोन रेघा परस्पर समांतर असतात.

ईफ रेघेनें अब आणि कड ह्या दोन रेघांस छेदून, तिच्या एकाच अंगाकडील ईगब बाहेरील कोन, आंतल्या बगह कोना समोरील गहड कोना बरोबर होतो, किंवा बगह आणि गहड हे दोन आंतील कोन मिळून दोन काटकोनां बरा-बर होतात; तर अब आणि कड ह्या दोन रेघा परस्पर समांतर होतील.



ईगब कोन गहड कोना बरा-बर आहे, (प्रतिज्ञा)
आणि ईगब कोन अगह कोना बराबर आहे, (१.१५)
ह्यास्तव अगह कोन गहड कोना बराबर आहे; (प्र. प्र. १)
आणि ते व्युत्क्रम कोन आहेत,
म्हणून अब आणि कड ह्या दोन रेघा समांतर आहेत. (१. २७)

पुनः, बगह आणि गहड हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बराबर आहेत, (प्रतिज्ञा)
आणि अगह व बगह हेही दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बराबर आहेत, (१. १३)
ह्यास्तव अगह, बगह हे दोन कोन बगह, गहड ह्या दोन कोनां-बराबर आहेत. (प्र. प्र. १)
बराबरीच्या ह्या प्रत्येकांतून बगह साधारण कोन वजा कर;
म्हणून शेष अगह कोन, शेष गहड कोना बराबर आहे; (प्र. प्र. ३)

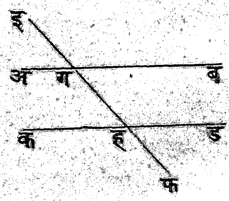
आणि ते व्युत्क्रम कोन आहेत; (१.२७)
म्हणून अब रेघ कड रेघेशीं समांतर आहे.
ह्याकरितां, जर एका रेघेनें दुसऱ्या दोन रेघांस इत्यादि.

सिद्धांत २९. प्रमेय.

जर एक रेघ दुसऱ्या दोन समांतर रेघांस छेदिते, तर व्युत्क्रम कोन बरावर होतात, आणि बाहेरील कोन त्या रेघेच्या त्याच आंगच्या आंतल्या कोना समोरील कोना बरावर होतो, आणि त्या रेघेच्या एकाच आंगचे आंतील दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बरावर असतात.

इफ रेघ अब आणि कड ह्या दोन समांतर रेघांस छेदिते; तर अगह आणि गहड हे व्युत्क्रम कोन बरावर होतील, आणि इगब बाहेरील कोन, इफ रेघेच्या त्याच आंगाकडील आंतल्या कोना समोरील गहड कोना बरावर होईल, आणि रेघेच्या एकाच आंगचे बगह, गहड आंतील कोन मिळून दोन काटकोनां बरावर होतील.

कारण, जर अगह कोन गहड कोना बरावर नसेल; तर त्या दोहों मधून एक दुसऱ्यापेक्षां मोठा असावा.
अगह कोन गहड कोनापेक्षां मोठा आहे असें मान.
तेव्हां अगह कोन गहड कोनापेक्षां मोठा आहे;
ह्यांतील प्रत्येकास बगह कोन मिळीव;
म्हणून अगह आणि बगह हे दोन कोन, बगह आणि गहड ह्या दोन कोनां पेक्षां मोठे आहेत. (प्र. प्र. ४)
परंतु अगह आणि बगह हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बरा-बर आहेत; (१.१३)



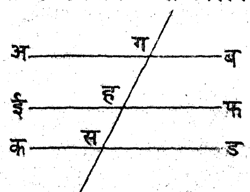
म्हणून बगह आणि गहड हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांहून कमी आहेत.
आतां, बगह आणि गहड हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांहून कमी आहेत,

25350

म्हणून अब आणि कड रेघा वाढविल्या असतां मिळतील. (प्र. प्र. १२)
परंतु त्या रेघा समांतर आहेत, ह्यास्तव मिळत नाहींत. (प्रतिज्ञा)
म्हणून अगह कोन गहड कोना बरावर नाहीं असें नाहीं,
म्हणजे तो गहड कोना बरावर आहे.
पण अगह कोन इगब कोना बरावर आहे, (१.१५)
म्हणून इगब कोन गहड कोना बरावर आहे. (प्र. प्र. १)
बराबरीच्या ह्या प्रत्येकास बगह कोन मिळीव.
म्हणून इगब आणि बगह हे दोन कोन, बगह आणि गहड ह्या दोन कोनां बरावर आहेत. (प्र. प्र. २)
परंतु इगब आणि बगह हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बरावर आहेत. (१.१३)
म्हणून बगह आणि गहड हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बरावर आहेत. (प्र. प्र. १)
ह्याकरितां, जर एक रेघ इत्यादि.

सिद्धांत ३०. प्रमेय.

ज्या रेघा दुसऱ्या एकाच रेघेशीं समांतर असतात त्या परस्पर समांतर असतात.



अब, कड ह्या रेघांतील प्रत्येक ईफ रेघेशीं समांतर आहे; तर अब, कड-शीं समांतर होईल.

गहस रेघ अब, ईफ, कड ह्या रेघांस छेदी अशी काढ.

तेव्हां गहस रेघ अब, ईफ समांतर रेघांस छेदिते, म्हणून अगह कोन गहफ कोना बरावर आहे. (१.२९)
आणि गस रेघ ईफ, कड समांतर रेघांस छेदिते, म्हणून गहफ कोन गसड कोना बरावर आहे. (१.२९)
परंतु अगस कोन गहफ कोना बरावर आहे असें वर दाखविलें आहे.
म्हणून अगस कोन गसड कोना बरावर आहे; (प्र. प्र. १)
आणि हे कोन व्युत्क्रम आहेत;

म्हणून अब, कड शीं समांतर आहे. (१.२७)

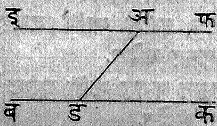
ह्याकरितां, ज्या रेषा दुसऱ्या एकाच इत्यादि.

सिद्धांत ३१. कृत्य.

दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या सरळ रेषेशीं एक समांतर सरळ रेघ काढावयाचें.

अ दिलेला बिंदु आहे, आणि बक दिलेली रेघ आहे; तर अ बिंदूपासून बक शीं समांतर रेघ काढावयाची आहे.

बक रेषेंत ड बिंदु घे आणि अड सांध; अड रेषेंत अ बिंदूशीं अडक कोना बरावर इअड कोन कर, (१.२३) आणि इअ रेघ फ पर्यंत वाढीव. इफ, बकशीं समांतर होईल.



बक, इफ ह्या दोन रेषांस मिळणारी अड रेघ इअड, अडक हे दोन व्युत्क्रम कोन बराबर करिते, (रचना)
म्हणून इफ, बक शीं समांतर आहे. (१.२७)

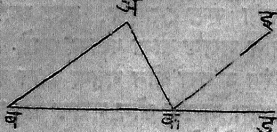
ह्याकरितां, दिलेल्या अ बिंदूंतून दिलेल्या बक रेषेशीं इअफ रेघ समांतर काढली आहे.

सिद्धांत ३२. प्रमेय.

त्रिकोणाची एक बाजू वाढविली, तर बाहेरील कोन आंतिला समोरील दोहों कोनां बराबर होतो, आणि प्रत्येक त्रिकोणाचे आंतील तीन कोन मिळून दोन काटकोनां बराबर असतात.

अबक त्रिकोणाची बक बाजू, ड पर्यंत वाढविली आहे; तर बाहेरील अकड कोन आंतिला समोरील कअब, अबक ह्या दोन कोनां बराबर होईल, आणि त्रिकोणाचे आंतील अबक, बकअ, कअब तीन कोन दोन काटकोनां बराबर होतील.

क बिंदूंतून अब शीं कइ समांतर काढ. (१.३१)



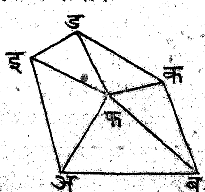
तेव्हां अब, कइ शीं समांतर आहे, आणि त्यांस अक मिळते, म्हणून बअक, अकइ हे व्युत्क्रम कोन बराबर आहेत. (१.२९)
पुनः, अब, कइ ह्या दोन समांतर रेषांस बड मिळते, म्हणून बाहेरील इकड कोन, आंतिला समोरील अबक कोना बराबर आहे (१.२९)
परंतु अकइ कोन बअक कोना बराबर आहे असें वर दाखविलें आहे;
म्हणून सगळा बाहेरील अकड कोन, आंतिला समोरील कअब, अबक ह्या दोन कोनां बराबर आहे. (प्र. प्र. २)

ह्यांतील प्रत्येकास अकब कोन मिळीव;
म्हणून अकड, अकब हे दोन कोन, कबअ, बअक, अकब ह्या तीन कोनां बराबर आहेत. (प्र. प्र. २)
परंतु अकड, अकब हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बराबर आहेत ; (१.१३)
म्हणून कबअ, बअक, अकब हे तीन कोन मिळून दोन काटकोनां बराबर आहेत. (प्र. प्र. १)

ह्याकरितां, त्रिकोणाची एक बाजू इत्यादि.

कुरलरी १. कोणत्याही सरळ रेषाकृतीचे आंतील सर्व कोन आणि चार काटकोन मिळून, आकृतीस जितक्या बाजू आहेत त्यांच्या दुपट काटकोनां बराबर असतात.

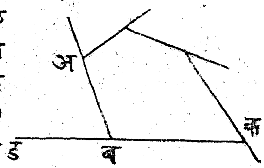
कारण, अबकडइ ह्या कोणत्याही एका सरळ रेषाकृतींतील एका फ बिंदू पासून तिच्या प्रत्येक कोना पर्यंत सरळ रेघा काढल्या असतां, आकृतीस जितक्या बाजू आहेत तितके तींत त्रिकोण होतात.



आणि वरील सिद्धांता प्रमाणें ह्या त्रिकोणांचे सर्व कोन मिळून, जितके त्रिकोण आहेत, म्हणजे आकृतीस जितक्या बाजू आहेत, त्यांच्या दुपट काटकोनां बराबर आहेत. आणि त्रिकोणांचे सर्व कोन मिळून, आकृतीचे सर्व आंतील कोन आणि त्रिकोणांचे साधारण फ शिरोबिंदूंत होणारे सर्व कोन ह्यां बराबर आहेत.
पण फ बिंदूशीं होणारे सर्व कोन चार काटकोनां बराबर आहेत; (१.१५ कुर. २)

म्हणून आकृतीचे सर्व आंतील कोन आणि चार काटकोन मिळून, आकृतीस जितक्या बाजू आहेत त्यांच्या दुपट काटकोनां बराबर आहेत.

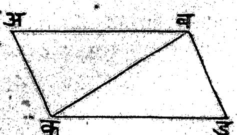
कुरलरी २. कोणत्याही सरळ रेषाकृतीचे बाहेरील सर्व कोन मिळून चार काटकोनां बराबर असतात.



कारण, आकृतीचा प्रत्येक आंतील कोन (अबक) आणि त्याजवळचा बाहेरील कोन (अबड) मिळून दोन काटकोनां बराबर आहेत. (१.१३) म्हणून आंतील सर्व कोन आणि बाहेरील सर्व कोन मिळून, आकृतीस जितक्या बाजू आहेत त्यांच्या दुपट काटकोनां बराबर आहेत.
परंतु वरील कुरलरी प्रमाणें आकृतीचे आंतील सर्व कोन आणि चार काटकोन मिळून आकृतीस जितक्या बाजू आहेत त्यांच्या दुपट काटकोनां बराबर आहेत.
म्हणून आकृतीचे सर्व आंतील कोन आणि बाहेरील कोन मिळून आंतील सर्व कोन आणि चार काटकोन ह्यां बराबर आहेत. (प्र. प्र. १)
पण आंतील सर्व कोन प्रत्येकांत साधारण आहेत; ते काढून टाक; म्हणून बाहेरील सर्व कोन चार काटकोनांबराबर आहेत. (प्र. प्र. ३)

सिद्धांत ३३. प्रमेय.

ज्या रेषा दुसऱ्या दोन समान आणि समांतर रेषांचीं एकेका अंगचीं टोकें सांधतात, त्या स्वतां समान आणि समांतर असतात



अब आणि कड ह्या दोन समान आणि समांतर रेषा आहेत; आणि अक आणि बड ह्या रेषा त्यांच्या एकेका अंगचीं टोकें सांधतात; तर अक आणि बड ह्याही परस्पर समान आणि समांतर होतील.

बक सांध.

अब रेष कड रेषेशीं समांतर आहे, (प्रतिज्ञा)
आणि बक त्यांस मिळते,

म्हणून अबक, बकड हे व्युत्क्रम कोन बराबर आहेत. (१.२९)
आणि अब रेघ कड रेघे बराबर आहे, (प्रतिज्ञा)
आणि बक रेघ अबक आणि डकब त्रिकोणांस साधारण आहे;
ह्यास्तव अब, बक ह्या बाजू डक, कब ह्या बाजूंशीं प्रत्येकीं बराबर आहेत;
आणि वर दाखविल्या प्रमाणें अबक कोन बकड कोना बराबर आहे;
म्हणून अक पाया बड पाया बराबर आहे, आणि अबक त्रिकोण बकड त्रिकोणा बराबर आहे, आणि त्यांचे समान बाजूंसमोरील कोन परस्पर बराबर आहेत; (१.४)
ह्यास्तव अकब कोन कबड कोना बराबर आहे.

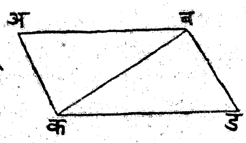
आतां बक रेघ अक आणि बड ह्या दोन रेघांस मिळून, अकब आणि कबड हे व्युत्क्रम कोन बराबर होतात, म्हणून अक आणि बड ह्या रेघा परस्पर समांतर आहेत. (१.२७)
आणि त्या बराबर आहेत असें वर दाखविलेंच आहे.

ह्याकरितां, ज्या रेघा दुसऱ्या दोन समान इत्यादि.

सिद्धांत ३४. प्रमेय.

समांतर भुज चौकोनांत समोरा समोरच्या बाजू व समोरा समोरचे कोन परस्पर बराबर असतात, आणि कर्ण त्याचे दोन समान भाग करितो.

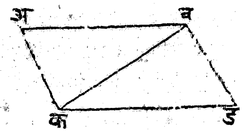
अकडब एक समांतर भुज चौकोन आहे, आणि बक त्याचा कर्ण आहे; तर ह्या चौकोनाच्या समोरा समोरच्या बाजू व कोन परस्पर बराबर होतील, आणि बक कर्ण त्याचे दोन समान भाग करील.



अब रेघ कड रेघेशीं समांतर आहे, आणि बक त्यांस मिळते, म्हणून अबक आणि बकड हे व्युत्क्रम कोन परस्पर बराबर आहेत. (१.२९)

आणि अक, बड शीं समांतर आहे, आणि बक त्यांस मिळते,

म्हणून अकब, कबड हे व्युत्क्रम कोन परस्पर बराबर आहेत. (१.२९)
म्हणून अबक आणि बकड ह्या दोन त्रिकोणांत, पहिल्याचे अबक, बकअ कोन, दुसऱ्याच्या डकब, कबड ह्या कोनांशीं अनुक्रमें बराबर आहेत, आणि ह्या समान कोनांस सांधणारी बक बाजू दोहों त्रिकोणांस साधारण आहे;



ह्यास्तव अब बाजू कड बाजू बराबर आहे, आणि अक बाजू बड बाजू बराबर आहे, आणि बअक कोन कडब कोना बराबर आहे, (१.२६)

आणि अबक कोन बकड कोना बराबर आहे, आणि कबड कोन अकब कोना बराबर आहे,
म्हणून सगळा अबड कोन, सगळ्या अकड कोना बराबर आहे. (प्र. प्र. २)

आणि बअक कोन कडब कोना बराबर आहे हें वर दाखविलें आहे.
ह्यास्तव समांतर भुज चौकोनाच्या समोरा समोरच्या बाजू व समोरा समोरचे कोन बराबर आहेत.

आणि कर्णानें समांतरभुजाचे दोन समान भाग होतात.

कारण, अब, कड बराबर आहे, आणि बक साधारण आहे, म्हणून अब, बक ह्या दोन बाजू डक, कब ह्या दोन बाजूं बराबर आहेत; आणि अबक कोन बकड कोना बराबर आहे असें वरतीं दाखविलें आहे;
म्हणून अबक त्रिकोण बकड त्रिकोणा बराबर आहे, (१.४)
म्हणजे बक कर्ण अकडब समांतरभुजास दुभागतो.

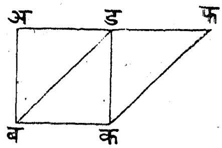
ह्याकरितां, समांतरभुज चौकोनांत इत्यादि.

सिद्धांत ३५. प्रमेय.

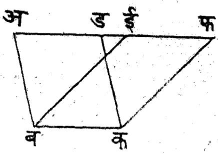
जे समांतरभुज चौकोन एकाच पायावर आणि एकाच समांतर रेषांच्या मध्यें असतात ते परस्पर बराबर असतात.

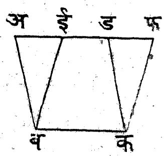
अबकड आणि ईबकफ हे समांतर भुज चौकोन एकाच बक पायावर आणि एकाच अफ आणि बक समांतर रेषांच्या मध्यें आहेत;

तर अबकड समांतर भुज चौकोन ईबकफ समांतर भुज चौकोना बराबर होईल.



जेव्हां अबकड आणि ईबकफ ह्या समांतर भुज चौकोनांच्या बक पाया समोरील अड, ईफ बाजू एकाच ड बिंदूंत संपतात, म्हणजे ई, ड हे बिंदु एकच होतात, तेव्हां ईबकफ समांतर भुज चौकोन डबकफ होतो; आणि प्रत्येक समांतर भुज चौकोन बडक त्रिकोणाची दुपट आहे; (१.३४) म्हणून ते समांतर भुज चौकोन परस्पर बराबर आहेत, (प्र. प्र. ६)





परंतु जेव्हां अबकड आणि ईबकफ समांतर भुज चौकोनांच्या बक पाया समोरील अड आणि ईफ बाजू एकाच बिंदूंत समाप्त होत नाहींत; तेव्हां अबकड हा समांतर भुज चौकोन आहे, ह्याकरितां अड बाजू बक बाजू बराबर आहे; (१.३४)

आणि तसेंच ईफ बाजू बक बाजू बराबर आहे;

म्हणून अड बाजू ईफ बाजू बराबर आहे; (प्र. प्र. १)

ह्याकरितां सर्व (आकृति २) अथवा शेष (आकृति ३.) अई बाजू, सर्व अथवा शेष डफ बाजू बराबर आहे. (प्र. प्र. २, ३)

आणि अब बाजू डक बाजू बराबर आहे; (१.३४)

म्हणून ईअ, अब ह्या दोन बाजू फड, डक ह्या दोन बाजूंशीं प्रत्येकीं बराबर आहेत; आणि बाहेरील फडक कोन, आंतील कडअ कोना समोरील ईअब कोना बराबर आहे; (१.२९)

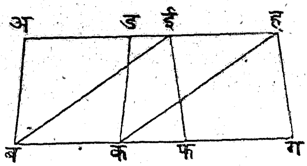
म्हणून ईअब त्रिकोण फडक त्रिकोणा बराबर आहे. (१.४)

आतां अबकफ ह्या सर्व आकृतींतून फडक आणि ईअब हे समान त्रिकोण क्रमानें वजा केले असतां, शेष आकृति बराबर आहेत; (प्र. प्र. ३) म्हणजे अबकड समांतर भुज चौकोन ईबकफ समांतर भुज चौकोना बराबर आहे.

ह्याकरितां, जे समांतर भुज चौकोन इत्यादि.

सिद्धांत ३६. प्रमेय.

समान पायांवर आणि एकाच समांतर रेघांच्या मध्यें जे समांतरभुज चौकोन असतात ते परस्पर बराबर असतात.



अबकड आणि ईफगह हे समांतर भुज चौकोन, बक आणि फग समान पायांवर, आणि अह आणि बग समांतर रेघांच्या मध्यें आहेत; तर अबकड समांतर भुज चौकोन ईफगह समांतर भुज चौकोना बराबर होईल.

बई आणि कह सांध.

तेव्हां बक रेघ फग रेघे बराबर आहे, (प्रतिज्ञा)
आणि फग, ईह परस्पर बराबर आहेत, (१.३४)
म्हणून बक रेघ ईह रेघे बराबर आहे; (प्र. प्र. १)
आणि त्या समांतर आहेत; (प्रतिज्ञा)
ह्याकरितां त्यांचीं एकेका अंगचीं शेवटें सांधणाऱ्या बई, कह रेघाही परस्पर बराबर व समांतर आहेत. (१.३३)
म्हणून ईबकह हा समांतरभुज चौकोन आहे. (व्याख्या ३२)
आणि तो अबकड समांतर भुज चौकोना बराबर आहे, कारण दोनही एकाच बक पायावर, आणि बक व अह ह्या समांतर रेघांच्या मध्यें आहेत. (१.३५)

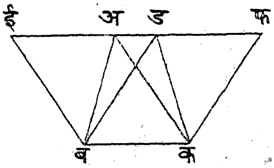
ह्याच कारणास्तव ईफगह समांतर भुज चोकोन ईबकह समांतरभुज चौकोना बराबर आहे.

म्हणून अबकड समांतर भुज चौकोन ईफगह समांतर भुज चौकोना बराबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्याकरितां, समान पायांवर इत्यादि.

सिद्धांत ३७. प्रमेय.

एकाच पायावर आणि एकाच समांतर रेघांच्या मध्यें जे त्रिकोण असतात ते परस्पर बराबर असतात.



अबक आणि डबक हे दोन त्रिकोण एकाच बक पायावर, आणि अड आणि बक ह्या दोन समांतर रेघांच्या मध्यें आहेत; तर अबक त्रिकोण डबक त्रिकोणा बराबर होईल.

अड रेघ दोन्ही अंगांस ई आणि फ बिंदू पर्यंत वाढीव; (गृ. गो. २)

आणि ब बिंदूतून बई रेघ कअ शीं समांतर काढ, आणि क बिंदूतून कफ रेघ बड शीं समांतर काढ. (१.३१)

तेव्हां ईबकअ आणि डबकफ ह्या दोन्ही आकृति समांतर भुज चौकोन आहेत; (व्याख्या ३३)

आणि ते बक पायावर, आणि बक आणि ईफ ह्या दोन समांतर रेघांच्या मध्यें आहेत, ह्यास्तव ते परस्पर बराबर आहेत. (१.३५)

आणि अबक त्रिकोण ईबकअ समांतर भुज चौकोनाचा अर्धा भाग आहे, कारण अब कर्ण त्या समांतर भुज चौकोनास दुभागतो; (१.३४)

आणि डबक त्रिकोण डबकफ समांतर भुज चौकोनाचा अर्धा भाग आहे, कारण डक कर्ण त्या चौकोनास दुभागतो. (१.३४)

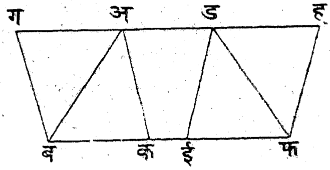
परंतु ईबकअ आणि डबकफ हे समांतर भुज चौकोन परस्पर बराबर आहेत असें वर दाखविलें आहे.

म्हणून अबक त्रिकोण डबक त्रिकोणा बराबर आहे. (प्र.प्र. ७)

ह्याकरितां, एकाच पायावर इत्यादि.

सिद्धांत ३८. प्रमेय.

समान पायांवर आणि एकाच समांतर रेषांच्या मध्यें जे त्रिकोण असतात, ते परस्पर बराबर असतात.



बक आणि ईफ ह्या दोन समान पायांवर, आणि बफ आणि अड ह्या दोन समांतर रेषांच्या मध्यें अबक आणि डईफ हे दोन त्रिकोण आहेत; तर अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणा बराबर होईल.

अड रेष ग आणि ह ह्या दोन बिंदू पर्यंत दोन्ही अंगास वाढीव; (गृ. गो. २)

आणि ब बिंदूतून बग रेष कअ शीं, आणि फ बिंदूतून फह रेष ईड शीं समांतर काढ. (१.३१)

तेव्हां गबकअ आणि डईफह ह्या दोन आकृति समांतर भुज चौकोन आहेत. (व्याख्या ३३)

आणि ते बक, ईफ समान पायांवर, आणि बफ, गह समांतर रेषांच्या मध्यें आहेत, ह्यास्तव ते परस्पर बराबर आहेत, (१.३६)

आणि अबक त्रिकोण गबकअ समांतर भुज चौकोनाचा अर्धा भाग आहे, कारण, अब कर्ण त्याचे दोन समान भाग करितो; (१.३४)

आणि डईफ त्रिकोण डईफह समांतर भुज चौकोनाचा अर्धा भाग आहे, कारण, डफ कर्ण त्याचे दोन समान भाग करितो. (१.३४)

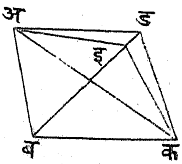
परंतु गबकअ आणि डईफह हे समांतर भुज चौकोन परस्पर बराबर आहेत असें वर दाखविलें आहे,

म्हणून अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणा बराबर आहे. (प्र. प्र. ७)

ह्याकरितां, समान पायांवर इत्यादि.

सिद्धांत ३९. प्रमेय.

एकाच पायावर आणि त्याच्या एकाच अंगास जे समान त्रिकोण असतात ते एकाच समांतर रेघांच्या मध्यें असतात.



अबक आणि डबक हे दोन समान त्रिकोण एकाच बक पायावर, आणि त्याच्या एकाच अंगास आहेत; तर ते एकाच समांतर रेघांच्या मध्यें होतील.

अड सांध.

तर अड रेघ बकशीं समांतर होईल.

कारण, जर अड रेघ बक रेघेशीं समांतर नसेल, तर अ बिंदूंतून अइ रेघ बक रेघेशीं समांतर काढ, म्हणजे ती बड रेघेस इ बिंदूंत छेदील. (१.३१)

इक सांध.

तेव्हां अबक आणि इबक हे दोन त्रिकोण एकाच बक पायावर, आणि बक आणि अइ ह्या दोन समांतर रेघांच्या मध्यें आहेत, ह्यास्तव ते दोन त्रिकोण परस्पर बराबर आहेत. (१.३७)

परंतु अबक त्रिकोण डबक त्रिकोणा बराबर आहे, (प्रतिज्ञा)

म्हणून डबक त्रिकोण इबक त्रिकोणा बराबर आहे, (प्र. प्र. १)

परंतु हें होणें अशक्य आहे, कारण इबक त्रिकोण बडक त्रिकोणाचा भाग आहे;

ह्यास्तव अइ रेघ बक रेघेशीं समांतर नाहीं.

ह्याप्रमाणेंच, अ बिंदूंतून अड रेघेशिवाय बक रेघेशीं दुसरी समांतर रेघ काढतां येत नाहीं असें दाखवितां येईल;

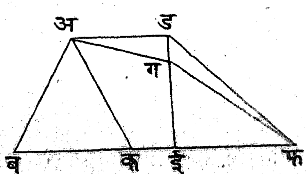
म्हणून अड रेघ बक रेघेशीं समांतर आहे.

ह्याकरितां एकाच पायावर इत्यादि.

सिद्धांत ४०. प्रमेय.

जे समान त्रिकोण एका रेषेंत असणाऱ्या समान पायांवर आणि त्या रेषेच्या एकाच अंगास असतात, ते एकाच समांतर रेषांच्या मध्यें असतात.

एकाच बफ सरळ रेषेंत असणाऱ्या बक आणि ईफ समान पायांवर, व त्या बफ रेषेच्या एकाच अंगास अबक आणि डईफ असे दोन समान त्रिकोण आहेत; तर ते एकाच समांतर रेषांच्या मध्यें होतील.



अड सांध.
तर अड रेघ बफ रेषेशीं समांतर होईल.

कारण, जर अड रेघ बफ रेषेशीं समांतर नसेल, तर अ बिंदूतून बफशीं अग समांतर काढ, (१.३१)
म्हणजे ती ईड ला ग बिंदूत छेदील.
गफ सांध.
तेव्हां अबक त्रिकोण गईफ त्रिकोणा बराबर आहे,
कारण ते बक, ईफ समान पायांवर, आणि बफ, अग समांतर रेषांच्या मध्यें आहेत. (१.३८)
परंतु अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणा बराबर आहे. (प्रतिज्ञा)
म्हणून डईफ त्रिकोण गईफ त्रिकोणा बराबर आहे. (प्र. प्र. १)
पण हें होणें अशक्य आहे, कारण, गईफ त्रिकोण डईफ त्रिकोणाचा तुकडा आहे.
म्हणून अग रेघ बफ शीं समांतर नाहीं.

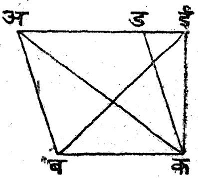
ह्याप्रमाणेंच, अ बिंदूतून अड रेषे शिवाय बफ शीं दुसरी रेघ समांतर काढतां येत नाहीं, असें दाखवितां येईल.
म्हणून अड रेघ बफ शीं समांतर आहे.

ह्याकरितां, जे समान त्रिकोण इत्यादि.

सिद्धांत ४१. प्रमेय.

जर समांतर भुज चौकोन आणि त्रिकोण एकाच पायावर, आणि एकाच समांतर रेघांच्या मध्यें असतील, तर समांतर भुज चौकोन त्रिकोणाची दुपट होईल.

अबकड हा समांतर भुज चौकोन आणि ईबक हा त्रिकोण एकाच बक पायावर, आणि बक, अई ह्या एकाच समांतर रेघांच्या मध्यें आहेत; तर अबकड समांतर भुज चौकोन ईबक त्रिकोणाची दुपट होईल.



अक सांध.

तेव्हां अबक त्रिकोण ईबक त्रिकोणा बराबर आहे, कारण, ते एकाच बक पायावर, आणि एकाच बक, अई समांतर रेघांच्या मध्यें आहेत. (१.३७)

परंतु अबकड समांतर भुज चौकोन अकब त्रिकोणाची दुपट आहे, कारण, अक कर्ण अबकड समांतर भुज चौकोनास दुभागतो. (१.३४)

म्हणून अबकड समांतर भुज चौकोनही ईबक त्रिकोणाची दुपट आहे.

ह्याकरितां, जर समांतर भुज चौकोन इत्यादि.

सिद्धांत ४२. कृत्य.

दिलेल्या त्रिकोणा बराबर, आणि ज्याचा एक कोन दिलेल्या कोना बराबर होईल असा एक समांतर भुज चौकोन काढावयाचें.

अबक दिलेला त्रिकोण आहे, आणि ड दिलेला कोन आहे: तर अबक त्रिकोणा बराबर, आणि ज्याचा एक कोन ड कोना बराबर होईल असा एक समांतर भुज चौकोन काढावयाचा आहे.

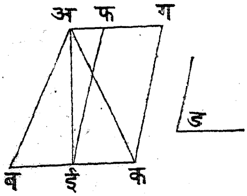
बक, ई मध्यें दुभाग; (१.१०)

अई सांध, आणि ईक रेघेंत ई बिंदूशीं कईफ कोन ड बराबर कर; (१.२३)

अ मधून अफग, ईक शीं समांतर काढ, आणि क मधून कग, ईफ शीं समांतर काढ. (१.३१)

म्हणून फईकग हा समांतर भुज चौकोन आहे. (व्याख्या ३३)

आणि बई, ईक बराबर आहे, (रचना)



म्हणून अबई त्रिकोण अईक त्रिकोणा बराबर आहे, कारण ते समान बई, ईक पायांवर, आणि बक, अग ह्या समांतर रेषांचे मध्यें आहेत. (१.३८)

म्हणून अबक त्रिकोण अईक त्रिकोणाची दुपट आहे.

परंतु फईकग समांतर भुज चौकोन आणि अईक त्रिकोण एकाच ईक पायावर आणि एकाच ईक, अग समांतर रेषांचे मध्यें आहेत, म्हणून फईकग समांतर भुज चौकोन अईक त्रिकोणाची दुपट आहे. (१.४१)

म्हणून फईकग समांतर भुज चौकोन अबक त्रिकोणा बराबर आहे. (प्र. प्र. ६)

आणि त्याचा एक कोन कईफ, दिलेल्या ड कोना बराबर आहे. (रचना)

ह्याकरितां, दिलेल्या अबक त्रिकोणा बराबर, आणि ड दिलेल्या कोना बराबर ज्याचा एक कोन कईफ आहे असा फईकग समांतर भुज चौकोन काढला आहे.

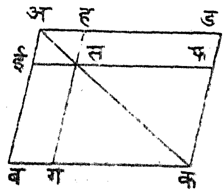
सिद्धांत ४३. प्रमेय.

समांतर भुज चौकोनाच्या कर्णांच्या दोहों बाजूंस जे पूरक समांतर भुज चौकोन असतात, ते परस्पर बराबर असतात.

अबकड समांतर भुज चौकोन आहे, आणि अक त्याचा कर्ण आहे; आणि ईह, गफ समांतर भुज चौकोन अक कर्णा भोंवतीं आहेत म्हणजे त्या दोघांतून अक जातो; आणि बस, सड हे अकच्या दोहों

बाजूंचे समांतर भुज चौकोन, अक भोंवतींच्या समांतरभुज चौकोनांस जोडल्यानें सगळा अबकड समांतर भुज चौकोन होतो, म्हणून त्यांस पूरक समांतरभुज चौकोन म्हणतात; तर बस पूरक सड पूरका बराबर होईल.

अबकड समांतर भुज चौकोन आहे, आणि अक त्याचा कर्ण आहे, म्हणून अबक त्रिकोण अडक त्रिकोणा बराबर आहे. (१.३४)
आणि अईसह समांतरभुज चौकोन आहे, आणि अस त्याचा कर्ण आहे, म्हणून अईस त्रिकोण अहस त्रिकोणा बराबर आहे. (१.३४)

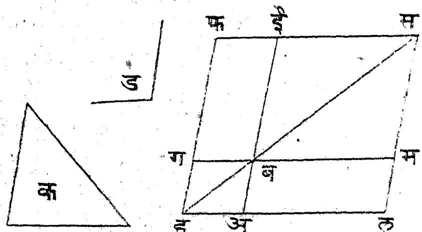


ह्याच रीतीनें सगक त्रिकोण सफक त्रिकोणा बराबर आहे.
आतां, अईस त्रिकोण अहस त्रिकोणा बराबर आहे, आणि सगक त्रिकोण सफक त्रिकोणा बराबर आहे;
म्हणून अईस आणि सगक हे दोन त्रिकोण मिळून, अहस आणि सफक ह्या दोन त्रिकोणां बराबर आहेत. (प्र. प्र. २)
परंतु सगळा अबक त्रिकोण सगळ्या अडक त्रिकोणा बराबर आहे, असें वर दाखविलें आहे.
म्हणून शेष बस पूरक शेष सड पूरका बराबर आहे. (प्र. प्र. ३)
ह्याकरितां, समांतर भुज चौकोनाच्या इत्यादि.

सिद्धांत ४४. कृत्य.

दिलेल्या त्रिकोणा बराबर, आणि ज्याचा एक कोन दिलेल्या कोना बराबर होईल असा एक समांतर भुज चौकोन दिलेल्या रेघेवर काढावयाचें.

अब दिलेली रेघ आहे, आणि क दिलेला त्रिकोण आहे, आणि ड दिलेला कोन आहे; तर क त्रिकोणा बराबर, व ज्याचा एक कोन ड बराबर होईल असा एक समांतरभुज चौकोन अब वर काढावयाचा आहे.
अब रेघ वाढवून, बई अमर्याद रेघेवर बईफग हा समांतरभुज



चौकोन असा कर कीं तो क त्रिकोणा बरोबर होईल, आणि त्याचा ईबग कोन ड कोना बरोबर होईल. (१.४२)
फग, ह पर्यंत वाढीव;
अ मधून अह, बग शीं किंवा ईफ शीं समांतर काढ, (१.३१)
आणि हब सांध.

तेव्हां, हफ रेघ अह, ईफ समांतर रेषांस मिळते, म्हणून अहफ, हफई हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बरोबर आहेत. (१.२९)
म्हणून बहफ, हफई हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांहून कमी आहेत.
म्हणून हब, फई वाढविल्या असतां मिळतील; (प्र. प्र. १२)
व त्या, स बिंदूंत मिळतात असें समज.
स मधून सल, ईअ शीं किंवा फह शीं समांतर काढ; (१.३१)
आणि हअ, गब, ल आणि म ह्यांपर्यंत वाढीव.

तेव्हां हलसफ समांतर भुज चौकोन आहे, व त्याचा कर्ण हस आहे; आणि अग, मई हे समांतर भुज चौकोन हस भोंवतीं आहेत; आणि लब, बफ हे पूरक समांतर भुज चौकोन आहेत.
म्हणून लब, बफ बरोबर आहे. (१.४३)
परंतु बफ, क त्रिकोणा बरोबर आहे, (रचना)
म्हणून लब, क त्रिकोणा बरोबर आहे. (प्र. प्र. १)
आणि गबई कोन अबम कोना बरोबर आहे. (१.१५)
आणि तो ड कोना बराबरही आहे; (रचना)

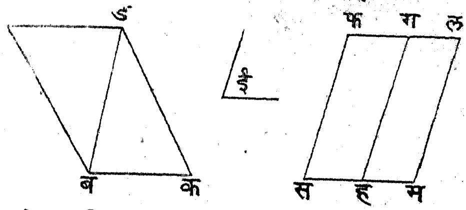
म्हणून अबम कोन ड कोना बराबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्याकरितां, दिलेल्या **अब** रेघेवर, **क** त्रिकोणा बराबर, आणि ज्याचा **अबम** कोन **ड** कोना बराबर आहे असा **लब** समांतर-भुज चौकोन काढला आहे.

सिद्धांत ४५. कृत्य.

दिलेल्या सरलरेषाकृती बराबर, व ज्याचा एक कोन दिलेल्या कोना बराबर होईल असा एक समांतर भुज चौकोन काढावयाचें.

अबकड दिलेली सरलरेषाकृति आहे, व ई दिलेला कोन आहे; तर असा एक समांतर भुज चौकोन काढावयाचा आहे कीं तो **अबकड** बराबर होईल, व त्याचा एक कोन ई बराबर होईल.

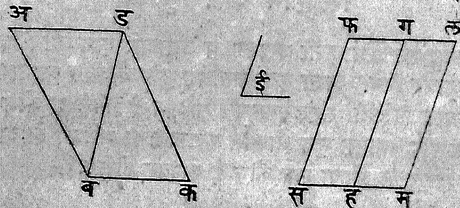


डब सांध, आणि अबड त्रिकोणा बराबर, आणि ज्याचा एक फसह कोन ई बराबर असा फह समांतरभुज चौकोन कर, (१.४२)
आणि गह रेघेवर, डबक त्रिकोणाबराबर, व ज्याचा एक गहम कोन ई बराबर असा गम समांतरभुज चौकोन कर, (१.४४)
म्हणजे फसमल हा विवक्षित समांतरभुज चौकोन होईल.

फसह आणि गहम ह्यांतील प्रत्येक कोन ई बराबर आहे, (रचना)
म्हणून फसह कोन गहम कोना बराबर आहे. (प्र. प्र. १)
ह्यांतील प्रत्येकास सहग कोन मिळीव;
म्हणून फसह, सहग हे कोन सहग, गहम ह्या कोनां बराबर आहेत. (प्र. प्र. २)
परंतु फसह, सहग मिळून दोन काटकोनां बराबर आहेत; (१.२९)
म्हणून सहग, गहम कोन मिळून दोन काटकोनां बराबर आहेत. (प्र. प्र. १)

(१.२८)

आणि हग रेष सम, फग ह्या दोन समांतर रेषांस मिळते,



म्हणून महग, हगफ हे दोन व्युत्क्रम कोन परस्पर बराबर आहेत. (१.२९)

प्रत्येकांत हगल कोन मिळीव,

म्हणून महग, हगल हे दोन कोन हगफ, हगल ह्या दोन कोनां बराबर आहेत. (प्र. प्र. २)

परंतु महग, हगल हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बराबर आहेत. (१.२९)

म्हणून हगफ, हगल हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बराबर आहेत; (प्र. प्र. १)

म्हणून फग, गल ह्या दोन रेषा एकाच फल सरळ रेषेंत आहेत. (१.१४)

आणि सफ, हग शीं समांतर आहे, आणि हग, मल शीं समांतर आहे, (रचना)

म्हणून सफ, मल शीं समांतर आहे; (१.३०)

आणि सम, फल समांतर आहेत; (रचना)

म्हणून सफलम समांतरभुज चौकोन आहे. (व्याख्या ३३)

आणि अबड त्रिकोण हफ समांतरभुज चौकोना बराबर आहे, (रचना)

आणि डबक त्रिकोण गम समांतरभुज चौकोना बराबर आहे; (रचना)

म्हणून सगळी अबकड सरलरेषाकृति सगळ्या सफलम समांतर-भुज चौकोना बराबर आहे. (प्र. प्र. २)

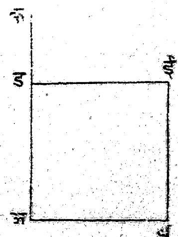
ह्याकरितां, सफलम समांतरभुज चौकोन असा काढला आहे, कीं तो दिलेल्या अबकड आकृतीबराबर आहे, आणि त्याचा फसम कोन दिलेल्या ई कोनाबराबर आहे.

कुरलरी. वरील सिद्धांतापासून, दिलेल्या रेषेवर दिलेल्या सरल-रेषाकृती बराबर, आणि ज्याचा एक कोन दिलेल्या कोनाबराबर होईल असा समांतरभुज चौकोन काढण्याची रीति सहज ध्यानांत येईल. म्हणजे, दिलेल्या रेषेवर पहिल्या अबड त्रिकोणा बराबर, आणि ज्याचा एक कोन दिलेल्या कोनाबराबर असा समांतरभुज चौकोन करावा, आणि तसेच समांतरभुज चौकोन अनुक्रमें दुसऱ्या, तिसऱ्या, इत्यादि त्रिकोणां बराबर करावे. (१.४४)

सिद्धांत ४६. कृत्य.

दिलेल्या रेषेवर चौरस काढावयाचें.

अब एक दिलेली रेघ आहे; तर तीवर चौरस काढावयाचा आहे.

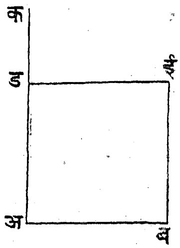


अ बिंदूंतून अब रेषेवर अक रेघ लंब काढ; (१.११)
आणि अड रेघ अब रेषेबराबर कर; (१.३)
आणि ड बिंदूंतून अब रेषेशीं डई समांतर काढ, आणि ब बिंदूंतून अड रेषेशीं बई समांतर काढ, (१.३१)
म्हणजे अडईब चौरस होईल.

अडईब समांतर भुज चौकोन आहे; (रचना)
म्हणून अब, डई बराबर आहे,
आणि अड, बई बराबर आहे, (१.३४)
परंतु अब, अड बराबर आहे. (रचना)
ह्यास्तव बअ, अड, डई, ईब ह्या चार रेघा परस्पर बराबर आहेत, आणि अडईब समांतरभुज चौकोन समभुज आहे. (प्र. प्र. १)

आणि त्याचे चारही कोन काटकोन आहेत;

कारण, अड रेघ अब आणि डई ह्या समांतर रेषांस मिळते, म्हणून बअड, अडई हे कोन दोन काटकोनां बराबर आहेत; (१.२९)
परंतु बअड कोन काटकोन आहे; (रचना)
म्हणून अडई कोनही काटकोन आहे.
(प्र. प्र. ३)
पण समांतरभुज चौकोनाचे समोरासमोरचे कोन परस्पर बराबर असतात. (१.३४)
म्हणून अबई आणि बईड ह्यां समोरील कोनां पैकीं प्रत्येक काटकोन आहे. (प्र. प्र. १)
ह्यास्तव अडईब ह्या समांतरभुज चौकोनाचे चारही कोन काटकोन आहेत;



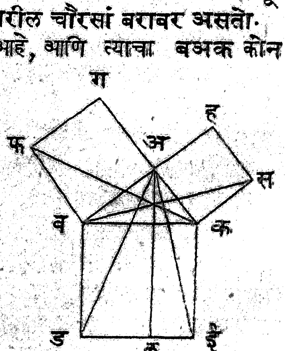
आणि त्याच्या चारही बाजू सम आहेत हें वर दाखविलें आहे.
ह्याकरितां, अडईब चौकोन चौरस आहे, (व्याख्या ३०)
व तो अब वर काढला आहे.

कुरलरी. वरील उपपादना वरून हें उघड आहे कीं ज्या समांतर-भुज चौकोनाचा एक कोन काटकोन असतो त्याचे सर्व कोन प्रत्येकीं काटकोन असतात.

सिद्धांत ४७. प्रमेय.

कोणत्याही काटकोन त्रिकोणांत काटकोना समोरच्या बाजू-वरील चौरस, दुसऱ्या दोन बाजूं वरील चौरसां बराबर असतो.

अबक एक काटकोन त्रिकोण आहे, आणि त्याचा बअक कोन काटकोन आहे, तर बक वरील चौरस, बअ आणि अक ह्यां वरील चौरसां बराबर होईल.



बक वर बडईक चौरस काढ, आणि बअ, अक ह्यांवर गब, हक चौरस काढ; (१.४६)
अ बिंदूतून बड शीं किंवा कई शीं अल रेघ समांतर काढ; (१.३१)
आणि अड, फक सांध.

वळ जवळचे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बराबर होतात;
म्हणून **कअ** आणि **गअ** ह्या दोन रेघा एकाच **कग** सरळ रेघेंत आहेत. (१.१४)
आणि असेंच, **अब**,**अह** ह्या दोन रेघा एकाच **बह** सरळ रेघेंत आहेत.

आतां, **डबक** कोन **फबअ** कोना बराबर आहे, कारण ते प्रत्येकीं काटकोन आहेत. (प्र. प्र. ११)
ह्यांतील प्रत्येकास **अबक** कोन मिळीव.
म्हणून सगळा **डबअ** कोन सगळ्या **फबक** कोना बराबर आहे. (प्र. प्र. २)
आणि **अब**,**बड** ह्या दोन बाजू **फब**, **बक** ह्या दोन बाजूंशीं अनुक्रमें बराबर आहेत. (व्याख्या ३०)
आणि **डबअ** कोन **फबक** कोना बराबर आहे;
ह्यास्तव **अबड** त्रिकोण **फबक** त्रिकोणा बराबर आहे. (१.४)

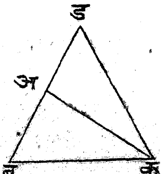
आतां **बल** समांतर भुज चौकोन **अबड** त्रिकोणाची दुपट आहे; कारण, ते एकाच **बड** पायावर, आणि **बड** आणि **अल** ह्या एकाच समांतर रेघांच्या मध्यें आहेत. (१.४१)
आणि **गब** चौरस **फबक** त्रिकोणाची दुपट आहे; कारण, ते एकाच **फब** पायावर, व एकाच **फब** आणि **गक** समांतर रेघांच्या मध्यें आहेत. (१.४१)
परंतु **अबड** त्रिकोण **फबक** त्रिकोणा बराबर आहे असें वर सिद्ध केलें आहे,
म्हणून **बल** समांतर भुज चौकोन **गब** चौरसा बराबर आहे. (प्र. प्र. ६)

ह्याप्रमाणेंच, **अई** आणि **बस** सांधल्यानें, **कल** समांतरभुज चौकोन **कह** चौरसा बराबर आहे, असें दाखवितां येईल.
म्हणून सगळा **बडईक** चौरस, **गब**, **हक** ह्या दोन चौरसां बराबर आहे. (प्र. प्र. २)

परंतु बडईक चौरस बक रेषेवर काढला आहे, आणि गब, हक हे दोन चौरस बअ, अक ह्या दोन रेषांवर काढले आहेत.
म्हणून बक वरील चौरस बअ,अक ह्यांवरील चौरसां बराबर आहे.
ह्या करितां, कोणत्याही काटकोन त्रिकोणांत इत्यादि.

सिद्धांत. ४८ प्रमेय.

जर कोणत्याही त्रिकोणांत एका बाजूवरील चौरस दुसऱ्या दोन बाजूंवरील चौरसां बराबर आहे, तर त्या दोन बाजूंच्या मधील कोन काटकोन असतो.



अबक त्रिकोणांत बक बाजूवरील चौरस दुसऱ्या बअ, अक बाजूंवरील चौरसां बराबर आहे, तर बअक कोन काटकोन होईल.
अ बिंदूंतून अक रेषेवर अड लंब काढ; (१.११)
आणि अड रेघ अब रेघे बराबर कर; (१.३) आणि डक सांध.
तेव्हां डअ रेघ बअ रेघे बराबर आहे, ह्मास्तव डअ वरील चौरस बअ वरील चौरसा बराबर आहे.
ह्यांतील प्रत्येकास अक वरील चौरस मिळीव.
म्हणून डअ, अक ह्यांवरील चौरस, बअ, अक ह्यांवरील चौरसां बराबर आहेत; (प्र. प्र. २)
परंतु डअक कोन काटकोन आहे, (रचना)
ह्मास्तव डक वरील चौरस डअ, अक ह्यांवरील चोरसां बराबर आहे. (१.४७)
परंतु बक वरील चौरस बअ, अक ह्यांवरील चौरसां बराबर आहे. (प्रतिज्ञा)
म्हणून डक वरील चौरस, बक वरील चौरसा बराबर आहे. (प्र. प्र.१)
ह्मास्तव डक बाजू बक बाजू बराबर आहे.
आणि डअ बाजू अब बाजू बराबर आहे; (रचना)
आणि अक बाजू डअक आणि बअक त्रिकोणांस साधारण आहे;

म्हणून डअ, अक बाजू बअ, अक बाजूंशीं अनुक्रमें बराबर आहेत;
आणि डक पाया बक पाया बराबर आहे हें वर दाखविलें आहे;
म्हणून डअक कोन बअक कोना बराबर आहे. (१.८)
परंतु डअक कोन काटकोन आहे; (रचना)
म्हणून बअक कोनही काटकोन आहे. (प्र. प्र. १)

ह्याकरितां, जर कोणत्याही त्रिकोणांत इत्यादि.

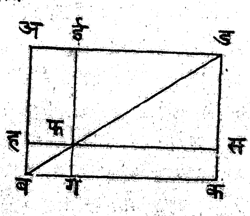
दुसरें पुस्तक.

व्याख्या.

१. प्रत्येक काटकोन चौकोनाच्या कोणत्याही एका काटकोना जवळच्या दोहों बाजूंनीं तो काटकोन चौकोन झाला आहे असें म्हणण्याचा परिपाठ आहे.

२. प्रत्येक समांतरभुज चौकोनांत कर्णा भोंवतींच्या दोहों समांतरभुज चौकोनांपैकीं एक आणि दोन्ही पूरक समांतरभुज चौकोन मिळूना जी आकृति होते, तिला **गोमुखी** म्हणतात.

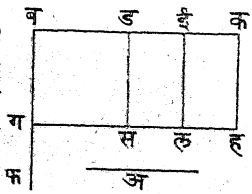
जसें, हग समांतरभुज चौकोन आणि अफ, फक पूरक समांतरभुज चौकोन मिळून एक गोमुखी होते, आणि ती, समांतरभुज चौकोनाच्या समोरासमोरील तीन कोनांच्या अक्षरांनीं म्हणजे अगस, किंवा ईहक ह्या तीन अक्षरांनीं दाखवितात.



सिद्धांत १. प्रमेय.

जर दोन रेघां पैकीं एकीचे अनेक विभाग केले, तर त्या दोन रेघांनीं झालेला काटकोन चौकोन, न विभागलेली रेघ आणि विभागलेल्या रेघेचे वेगळाले विभाग ह्यांनीं झालेल्या काटकोन-चौकोनां बरोबर होतो.

अ आणि बक दोन रेघा आहेत, आणि बक चे ड, ई ह्या बिंदूंत तीन विभाग केले आहेत; तर अ, बक ह्या रेघांनीं झालेला काटकोन चौकोन, अ आणि बड, अ आणि डई, अ आणि ईक ह्यांनीं झालेल्या वेगळाल्या काटकोन चौकोनां बराबर होईल.



ब पासून बक वर बफ लंब काढ; (१.११)
आणि बग, अ बराबर कर: (१.३)
ग पासून गह, बक शीं समांतर काढ; आणि बग शीं ड, ई, क ह्यां पासून डस, ईल, कह, समांतर काढ. (१.३१)

तेव्हां, बह काटकोन चौकोन बस, डल, ईह ह्या तीन काटकोन-चौकोनां बराबर आहे.

परंतु बह, गब आणि बक ह्या रेघांनीं झाला आहे,
आणि गब, रेघ अ बराबर आहे; (रचना)
म्हणून तो अ आणि बक ह्यांनीं झाला आहे.
आणि बस, गब आणि बड ह्यांनीं झाला आहे,
आणि गब, अ बराबर आहे, (रचना)
म्हणून तो अ आणि बड ह्यांनीं झाला आहे;
आणि डल, डस व डई ह्यांनीं झाला आहे,
परंतु डस, बग बराबर आहे, आणि बग, अ बराबर आहे, (१.३४)
म्हणून तो अ आणि डई ह्यांनीं झाला आहे;
आणि असेंच ईह, अ आणि ईक ह्यांनीं झाला आहे.

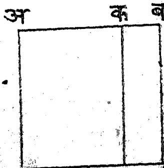
म्हणून अ आणि बक ह्यांनीं झालेला काटकोन चौकोन, अ आणि बड, अ आणि डई, अ आणि ईक ह्यांनीं झालेल्या काटकोन चौकोनां बराबर आहे.

ह्याकरितां, जर दोन रेघां पैकीं इत्यादि.

सिद्धांत २. प्रमेय.

जर एका रेघेचे दोन विभाग केले, तर सर्व रेघ आणि प्रत्येक विभाग ह्यांनीं झालेले काटकोनचौकोन मिळून, सर्व रेघे वरील चौरसा बराबर होतात.

अब चे क बिंदूंत दोन विभाग केले आहेत; तर अब आणि बक ह्यांनीं झालेला काटकोन चौकोन, आणि अब आणि अक ह्यांनीं झालेला काटकोन चौकोन मिळून, अब वरील चौरसा बराबर होतील.



[सूचना. 'ह्यांनीं झालेला' हे शब्द वरचेवर न यावे म्हणून 'अब, अक ह्या रेघांनीं झालेला काटकोन चौकोन' ह्यां बदल केव्हां केव्हां नुसतें अब, अक काटकोन चौकोन असें म्हटलें आहे.]

अब वर अबईड चौरस काढ; (१.४६)

आणि क पासून कफ, अड शीं किंवा बई शीं समांतर काढ. (१.३१)

तेव्हां अई, अफ आणि कई, ह्या दोन काटकोन चौकोनां बराबर आहे.

परंतु अई, अब वरील चौरस आहे.

आणि अफ, अड आणि अक ह्यांनीं झालेला काटकोन चौकोन आहे, (१. व्याख्या २०)

परंतु अड, अब बराबर आहे;

म्हणून अफ, अब आणि अक ह्यांनीं झालेला काटकोन चौकोन आहे.

आणि कई, बई आणि बक ह्यांनीं झालेला काटकोन चौकोन आहे, (१. व्याख्या २०)

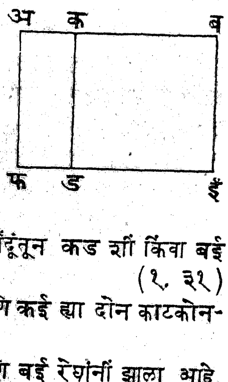
परंतु बई, अब बराबर आहे;

म्हणून कई, अब आणि बक ह्यांनीं झालेला काटकोनचौकोन आहे. म्हणून अब, अक काटकोन चौकोन आणि अब, बक काटकोन चौकोन मिळून, अब वरील चौरसा बराबर आहेत.

ह्याकरितां, जर एका रेघेचे इत्यादि.

सिद्धांत ३. प्रमेय.

एका रेघेचे दोन विभाग केले, तर सगळी रेघ आणि एक विभाग ह्यांनीं झालेला काटकोन चौकोन, दोन विभागांनीं झालेला काटकोन चौकोन व प्रथम घेतलेल्या विभागावरील चौरस ह्यां बराबर होतो.



अब रेघेचे क बिंदूंत दोन विभाग केले आहेत; तर अब, बक काटकोन-चौकोन, अक, कब काटकोन चौकोन आणि बक वरील चौरस ह्यां बराबर होईल.

बक रेघेवर कडईब चौरस काढ; (१. ४६)

ईड रेघ फ बिंदूपर्यंत वाढीव, आणि अ बिंदूंतून कड शीं किंवा बई शीं अफ रेघ समांतर काढ. (१. ३१)

तेव्हां अई काटकोन चौकोन, अड आणि कई ह्या दोन काटकोन-चौकोनां बराबर आहे.

परंतु अई काटकोन चौकोन, अब आणि बई रेघांनीं झाला आहे, आणि बई, बक बराबर आहे, (१. व्याख्या ३०)

म्हणून अई काटकोन चौकोन, अब आणि बक ह्यांनीं झाला आहे; आणि अड काटकोन चौकोन, अक आणि बक ह्यांनीं झाला आहे, कारण, कड, कब बराबर आहे; (१. व्याख्या ३०)

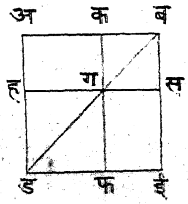
आणि कई हा बक वरील चौरस आहे.

म्हणून अब, बक काटकोन चौकोन, अक, कब काटकोन चौकोन आणि बक वरील चौरस ह्यां बराबर आहे.

ह्याकरितां, जर एका रेघेचे दोन विभाग इत्यादि.

सिद्धांत ४. प्रमेय.

जर एका रेषेचे दोन विभाग केले, तर सर्व रेषेवरील चौरस, दोहों विभागां वरील वेगवेगळे चौरस आणि त्या दोहों विभागांनीं झालेला दुपट काटकोन चौकोन ह्यां बराबर होतो.



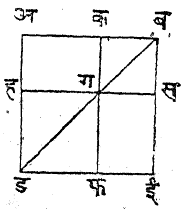
अब रेषेचे क बिंदूंत दोन विभाग केले आहेत; तर अब रेषेवरील चौरस, अक आणि बक ह्या दोन रेषांवरील चौरस व त्याच रेषांनीं झालेला दुपट काटकोन चौकोन ह्यां बराबर होईल.

अब रेषे वर अडईब चौरस काढ; (१.४६)
बड सांध; आणि क बिंदूंतून कगफ, अड शीं किंवा बई शीं समांतर काढ, आणि ग बिंदूंतून अब शीं किंवा डई शीं हस समांतर काढ. (१.३१)

तेव्हां कफ, अड शीं समांतर आहे, आणि बड त्यांस मिळते, म्हणून कगब बाहेरील कोन, त्याच्या आंतल्या समोरील अडब कोनाबराबर आहे; (१.२९)
परंतु अडब कोन अबड कोना बराबर आहे; (१.५)
कारण, बअ, अड बराबर आहे; (१. व्याख्या ३०)
म्हणून कगब कोन कबग कोना बराबर आहे; (प्र. प्र. १)
ह्यास्तव कग, कब बराबर आहे. (१.६)
पण कब, गस बराबर आहे, आणि कग, बस बराबर आहे. (१.३४)
म्हणून कगसब आकृति समभुज आहे.

आणि ती समकोणही आहे; कारण, कग, बस शीं समांतर आहे, आणि कब त्यांस मिळ्ते, म्हणून सबक आणि गकब हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बराबर आहेत. (१.२९)
परंतु सबक काटकोन आहे. (१. व्याख्या ३०)
म्हणून गकबही काटकोन आहे. (प्र. प्र. ३)
ह्यास्तव त्यां समोरील कगस आणि गसब हेही कोन प्रत्येकीं काटकोन आहेत. (१.३४, आणि प्र. प्र. १)

म्हणून कगसब आकृति काटकोन चौकोन आहे; आणि ती समभुज आहे असें वर दाखविलें आहे; म्हणून कगसब चौरस आहे, आणि तो कब वर आहे.



ह्याच कारणास्तव हफ ही चौरस आहे, आणि तो अकच्या बराबरीच्या हग रेषेवर आहे. (१.३४)

म्हणून हफ, कस हे चौरस अक, कब ह्यां वरील आहेत.

आणि अग पूरक गई पूरका बराबर आहे; (१.४३)

आणि अग पूरक काटकोनचौकोन आहे, व तो अक आणि कब ह्यांनीं झाला आहे, कारण कग, कब बराबर आहे; (१. व्याख्या ३०)

म्हणून गई पूरकही अक आणि कब ह्यांनीं झालेला काटकोन चौकोन आहे. (प्र. प्र. १)

आणि अर्थातच अग, गई हे मिळून, अक व कब ह्यांनीं झालेल्या दुपट काटकोन चौकोना बराबर आहेत.

आणि हफ, कस हे चौरस अक, कब ह्यांवरील आहेत.

म्हणून हफ, कस, अग आणि गई ह्या चार आकृति मिळून, अक व कब ह्यांवरील चौरस, आणि अक व कब ह्यांनीं झालेला दुपट काटकोन चौकोन ह्यांबराबर आहेत.

परंतु ह्या चार आकृतींनीं अडईब चौरस होतो, आणि तो अब वरील आहे.

म्हणून अब वरील चौरस, अक आणि कब ह्यांवरील चौरस आणि अक व कब ह्यांनीं झालेला दुपट काटकोन चौकोन ह्यां बराबर आहे.

ह्याकारितां, जर एका रेषेचे इत्यादि.

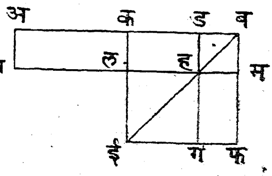
कुरलरी. वरील सिद्धतेवरून हें उघड आहे कीं चौरसाच्या कर्णा भोंवतींचे समांतर भुज चौकोनही चौरस असतात.

सिद्धांत ५. प्रमेय.

जर एका रेषेचे दोन समान आणि दोन असमान विभाग केले, तर असमान विभागांचा काटकोन चौकोन आणि विभागणाऱ्या

बिंदूंच्या मधील रेघेवरील चौरस हे दोन मिळून, अर्ध्या रेघेवरील चौरसा बराबर होतात.

अब रेघेचे क बिंदूंत दोन समान, आणि ड बिंदूंत दोन असमान विभाग केले आहेत; तर अड, डब काटकोन चौकोन आणि कड वरील चौरस हे दोन मिळून, कब वरील चौरसा बराबर होतील.



कब रेघेवर कईफब चौरस काढ; (१. ४६)
बई सांध; आणि ड बिंदूंतून कई शीं अथवा बफ शीं डहग रेघ समांतर काढ; आणि ह बिंदूंतून कब शीं अथवा ईफ शीं सलम रेघ समांतर काढ; आणि अ बिंदूंतून कल शीं अथवा बम शीं अस रेघ समांतर काढ. (१. ३१)
तेव्हां कह पूरक हफ पूरका बराबर आहे; (१. ४३)
ह्या प्रत्येकास डम मिळीव, म्हणून सगळा कम काटकोन चौकोन सगळ्या डफ काटकोन चौकोना बराबर आहे. (प्र. प्र. २)
परंतु अक, बक बराबर आहे, (प्रतिज्ञा)
ह्यास्तव अल काटकोन चौकोन, कम काटकोन चौकोना बराबर आहे. (१. ३६)
म्हणून अल काटकोन चौकोनही डफ काटकोन चौकोना बराबर आहे. (प्र. प्र. १)
ह्या प्रत्येकास कह काटकोन चौकोन मिळीव; म्हणून सगळा अह काटकोन चौकोन, डफ आणि कह ह्या दोन काटकोन चौकोनां बराबर आहे. (प्र. प्र. २)
परंतु अह काटकोन चौकोन अड, डब ह्यांनीं झालेला आहे, कारण डह, डब बराबर आहे; (२.४, कु.)
आणि डफ आणि कह हे काटकोन चौकोन मिळून कमग गोमुखी होते;
म्हणून कमग गोमुखी अड, बड काटकोन चौकोना बराबर आहे.

ह्या प्रत्येकास लग, कड वरील चौरस मिळीव. (२. ४, कु; व १. ३४)

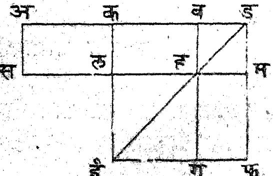
म्हणून कमग गोमुखी आणि लग चौरस मिळून, अड, डब काटकोन चौकोन आणि कड वरील चौरस ह्यां बराबर आहेत. (प्र. प्र. २)
परंतु कमग गोमुखी आणि लग चौरस मिळून, कईफब म्हणजे कब वरील चौरस होतो.
म्हणून अड, डब काटकोन चौकोन आणि कड वरील चौरस मिळून, कब वरील चौरसा बराबर आहेत.

ह्याकरितां, जर एका रेघेचे दोन इत्यादि.

कुरलरी. ह्या सिद्धांतावरून हें उघड होतें कीं दोन असमान अक, कड रेघां वरील चौरसांची वजाबाकी, त्या रेघांची बेरीज व वजाबाकी ह्यांनीं झालेल्या काटकोन चौकोना बराबर असते.

सिद्धांत ६. प्रमेय.

जर एका रेघेचे दोन समान विभाग करून, ती कोणत्याही एका बिंदूपर्यंत वाढविली, तर वाढविलेल्या विभागा सहित सर्व रेघ आणि वाढविलेला विभाग ह्यांनीं झालेला काटकोन चौकोन आणि अर्ध्या रेघे वरील चौरस मिळून, अर्धी रेघ आणि वाढविलेला विभाग मिळून, झालेल्या रेघे वरील चौरसा बराबर होतात.



अब रेघेचे क बिंदूंत दोन समान विभाग केले आहेत, आणि ती ड बिंदू पर्यंत वाढविली आहे; तर अड, डब काटकोन चौकोन आणि कब वरील चौरस मिळून, कड वरील चौरसा बराबर होतील.

कड वर कईफड चौरस काढ; (१. ४६)
डई सांध; ब बिंदूतून कई शीं किंवा डफ शीं बहग समांतर काढ; आणि ह बिंदूंतून अड शीं किंवा ईफ शीं सलम समांतर काढ; आणि अ बिंदूतून कल शीं किंवा डम शीं अस समांतर काढ. (१. ३१)
तेव्हां अक, कब बराबर आहे, (प्रतिज्ञा)

म्हणून अल काटकोन चौकोन कह काटकोन चौकोना बराबर आहे. (१. ३६)

परंतु कह पूरक हफ पूरका बराबर आहे; (१. ४३)

म्हणून अल ही हफ बराबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्या प्रत्येकास कम मिळीव.

म्हणून सगळ्या अम काटकोन चौकोन, कमग गोमुखी बराबर आहे. (प्र. प्र. २)

परंतु अम काटकोन चौकोन अड, डब ह्यांनीं झालेला आहे, कारण डम, डब बराबर आहे. (२.४, कु.)

ह्यास्तव अड, डब काटकोन चौकोन कमग गोमुखी बराबर आहे. (प्र. प्र. १)

प्रत्येकास लग, कब वरील चौरस मिळीव. (२.४,कु. व १.३४)

म्हणून अड, डब काटकोन चौकोन आणि कब वरील चौरस मिळून, कमग गोमुखी आणि लग चौरस ह्यां बराबर आहेत.

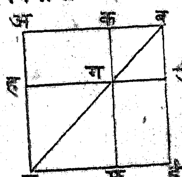
परंतु कमग गोमुखी आणि लग चौरस मिळून, कईफड म्हणजे कड वरील चौरस होतो;

म्हणून अड, डब काटकोन चौकोन आणि कब वरील चौरस मिळून, कड वरील चौरसा बराबर आहेत.

ह्याकरितां, जर एका रेघेचे इत्यादि.

सिद्धांत ७. प्रमेय.

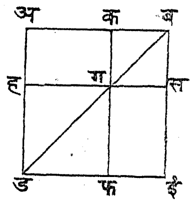
जर एका रेघेचे दोन विभाग केले, तर सर्व रेघ आणि तिचा एक विभाग ह्यांवरील चौरस, सर्व रेघ आणि तोच विभाग ह्यांनीं झालेला दुपट काटकोन चौकोन व दुसऱ्या विभागा वरील चौरस ह्यां बराबर होतात.



अब रेघेचे क बिंदूंत दोन विभाग केले आहेत; तर अब आणि बक ह्यां वरील चौरस मिळून, अब, बक दुपट काटकोन-चौकोन आणि अक वरील चौरस ह्यां बराबर होतील.

अब रेषेवर अडईब चौरस काढून, मागील सिद्धांतां प्रमाणेंच सर्व आकृति पुरी कर.

तेव्हां अग, गई बराबर आहे; (१.४३)
ह्या प्रत्येकास कस मिळीव;
म्हणून सगळा अस सगळ्या कई बराबर आहे; (प्र. प्र. २)
म्हणून अस आणि कई मिळून, अस ची दुपट आहेत.
परंतु अस आणि कई मिळून, असफ गोमुखी आणि कस चौरस होतात;



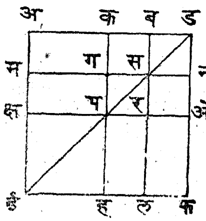
ह्यास्तव असफ गोमुखी आणि कस चौरस मिळून, अस ची दुपट आहेत.
पण अब, बक दुपट काटकोन चौकोन अस-ची दुपट आहे, कारण बस, बक बराबर आहे. (२.४,कु.)
म्हणून असफ गोमुखी आणि कस चौरस मिळून, अब, बक दुपट काटकोन चौकोना बराबर आहेत.
ह्या प्रत्येकास हफ म्हणजे अक वरील चौरस मिळीव.
(२.४,कु. आणि १.३४)
म्हणून असफ गोमुखी आणि कस व हफ हे चौरस मिळून, अब, बक दुपट काटकोन चौकोन आणि अक वरील चौरस ह्यां बराबर आहेत.
परंतु असफ गोमुखी आणि हफ चौरस मिळून अडईब म्हणजे अब वरील चौरस होतो;
आणि कस, बक वरील चौरस आहे;
म्हणून अब, बक ह्यांवरील चौरस, अब व बक ह्यांनीं झालेला दुपट काटकोन चौकोन आणि अक वरील चौरस ह्यां बराबर आहेत.

ह्याकरितां, जर एका रेषेचे इत्यादि.

सिद्धांत ८. प्रमेय.

जर एका रेघेचे दोन विभाग केले, तर सर्व रेघ आणि एक विभाग ह्यांनीं झालेला चौपट काटकोन चौकोन आणि दुसऱ्या विभागा वरील चौरस मिळून, सर्व रेघ आणि प्रथम घेतलेला विभाग मिळून झालेल्या रेघे वरील चौरसा बराबर होतात.

अब रेघेचे क बिंदूंत दोन विभाग केले आहेत; तर अब, बक चौपट काटकोन चौकोन आणि अक वरील चौरस, अब आणि बक मिळून झालेल्या रेघे वरील चौरसा बराबर होतील.

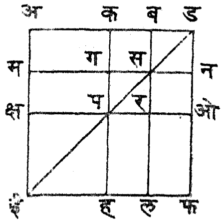


अब, ड पर्यंत वाढवून बड, कब बराबर कर; (गृ. गो. २, आणि १.३)
अड वर अईफड चौरस काढ; (१.४६)
आणि मागील सिद्धांताप्रमाणें दोन आकृति काढ.

तेव्हां कब, बड बराबर आहे, (रचना)
आणि कब, गस बराबर, आणि बड, सन बराबर आहे, (१.३४)
म्हणून गस, सन बराबर आहे. (प्र. प्र. १)
ह्याच कारणास्तव पर, रओ बराबर आहे.
आणि कब, बड बराबर, आणि गस, सन बराबर आहे;
म्हणून कस काटकोन चौकोन बन काटकोन चौकोना बराबर,
आणि गर काटकोन चौकोन रन काटकोन चौकोना बराबर आहे. (१.३६)
परंतु कस, रन बराबर आहे, कारण, ते कओ समांतरभुज चौकोनाचे पूरक आहेत; (१.४३)
म्हणून बन ही, गर बराबर आहे. (प्र. प्र. १)
म्हणून बन, कस, गर, रन हे चार काटकोन चौकोन परस्पर बराबर आहेत, आणि ते चार मिळून एका कस काटकोन चौकोनाची चौपट आहेत.

पुनः, कब, बड बराबर आहे, (रचना)
आणि बड, बस बराबर, (२.४,कुर.)

म्हणून कग, गप बराबर आहे. (प्र. प्र. १)



आणि कग, गप बराबर, आणि पर, रओ बराबर आहे; म्हणून अग काटकोन चौकोन मप काटकोन चौकोना बराबर, आणि पल काटकोन चौकोन रफ काटकोन-चौकोना बराबर आहे. (१.३६)

परंतु मप, पल बराबर आहे, कारण, ते मल समांतरभुज चौकोनाचे पूरक आहेत; (१.४३)

म्हणून अग ही रफ बराबर आहे. (प्र. प्र. १)

म्हणून अग, मप, पल, रफ हे चारही काटकोन चौकोन परस्पर बराबर आहेत, आणि ते चार मिळून एका अग ची चौपट आहेत.

आणि वरती सिद्ध केलें आहे कीं कस, बन, गर, रन हे चार मिळून कस ची चौपट आहेत; म्हणून हे आठ काटकोन चौकोन मिळून होणारी अओह गोमुखी एका अस काटकोन चौकोनाची चौपट आहे.

आणि अस काटकोन चौकोन अब, बक ह्यांनीं झाला आहे,
कारण, बस, बक बराबर आहे;

म्हणून अब, बक चौपट काटकोन चौकोन अस ची चौपट आहे.
परंतु अओह गोमुखी अस ची चौपट आहे असें सिद्ध केलें आहे;
म्हणून अब, बक चौपट काटकोन चौकोन अओह गोमुखी बराबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्यांतील प्रत्येकास क्षह, म्हणजे अक वरील चौरस मिळीव.
(२.४, कुरलरी, आणि १.३४)

म्हणून अब, बक चौपट काटकोन चौकोन आणि अक वरील चौरस मिळून, अओह गोमुखी आणि क्षह चौरस ह्यां बराबर आहेत.
(प्र. प्र. २)

परंतु अओह गोमुखी आणि क्षह चौरस मिळून सर्व आकृति अईफड म्हणजे अड वरील चौरस होतो.

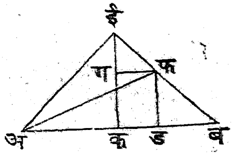
आणि अड रेघ, अब आणि बक मिळून झाली आहे ;
म्हणून अब, बक चौपट काटकोन चौकोन आणि अक वरील चौरस मिळून, अब आणि बक मिळून झालेल्या अड वरील चौरसा बरोबर आहेत.

ह्याकरितां, जर एका रेघेचे दोन विभाग इत्यादि.

सिद्धांत. ९. प्रमेय.

जर एका रेघेचे दोन समान, आणि दोन असमान विभाग केले, तर दोन असमान विभागांवरील चौरस, अर्ध रेघे वरील चौरस आणि विभागणाऱ्या बिंदूच्या मधील रेघे वरील चौरस ह्यांच्या दुपटी बरोबर होतात.

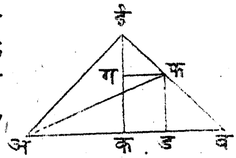
क बिंदूंत अब रेघेचे दोन समान विभाग केले आहेत, आणि ड बिंदूंत दोन असमान विभाग केले आहेत; तर अड व डब ह्यां वरील चौरस, अक आणि कड ह्यां वरील चौरसांच्या दुपटी बराबर होतील.



क बिंदूतून अब वर कई लंब काढ; (१.११)
आणि कई, अक बराबर किंवा कब बराबर कर; (१.३)
आणि ईअ, ईब सांध; ड मधून डफ, कई शीं समांतर काढ, आणि फ मधून फग, बअ शीं समांतर काढ; (१.३१)
आणि अफ सांध. (रचना)

तेव्हां अक, कई बराबर आहे, (१.५)
म्हणून ईअक कोन अईक कोना बराबर आहे; (रचना)
आणि अकई कोन काटकोन आहे,
म्हणून दुसरे दोन कोन अईक, ईअक मिळून एक काटकोना बराबर आहेत; (१.३२)
आणि ते परस्पर बराबर आहेत;
म्हणून त्यांतील प्रत्येक अर्ध काटकोन आहे.

त्याच कारणानें कईब, ईबक ह्या दोन कोनांपैकीं प्रत्येक अर्ध काटकोन आहे.



म्हणून सर्व अईब कोन एक काटकोन आहे.

आणि गईफ कोन अर्ध काटकोन आहे;

आणि ईगफ बाहेरील कोन त्याच्या आंतिला समोरील ईकब कोना बराबर आहे,

आणि ईकब काटकोन आहे,

(१.२९, व रचना)

म्हणून ईगफ कोन काटकोन आहे; (प्र. प्र. १)

म्हणून शेष ईफग कोन अर्ध काटकोन आहे. (१.३२)

म्हणून गईफ कोन ईफग कोना बराबर आहे, (प्र. प्र. १)

आणि ईग बाजू गफ बाजू बराबर आहे. (१.६)

असेंच, ब कोन अर्ध काटकोन आहे, आणि फडब कोन काटकोन आहे, कारण तो आंतिला समोरील ईकब कोना बराबर आहे; (१.२९)

म्हणून शेष बफड कोन अर्ध काटकोन आहे. (१.३२)

म्हणून ब कोन बफड कोना बराबर आहे. (प्र. प्र. १)

आणि डफ बाजू डब बाजू बराबर आहे. (१.६)

आतां अक, कई बराबर आहे, (रचना)

म्हणून अक वरील चौरस कई वरील चौरसा बराबर आहे;

आणि अर्थातच अक, कई ह्यां वरील चौरस, अक वरील चौरसाची दुपट आहेत.

परंतु अई वरील चौरस अक, कई ह्यां वरील चौरसां बराबर आहे; कारण, अकई कोन काटकोन आहे; (१. ४७)

म्हणून अई वरील चौरस अक वरील चौरसाची दुपट आहे.

असेंच, ईग, गफ बराबर आहे,

म्हणून ईग वरील चौरस गफ वरील चौरसा बराबर आहे;

आणि अर्थातच ईग, गफ ह्यां वरील चौरस गफ वरील चौरसाची दुपट आहेत.

परंतु ईगफ कोन काटकोन आहे,

म्हणून ईफ वरील चौरस ईग, गफ ह्यां वरील चौरसां बराबर आहे. (१.४७)

आणि गफ, कड बराबर आहे; (१.२६)
म्हणून ईफ वरील चौरस कड वरील चौरसाची दुपट आहे.
परंतु वर असें सिद्ध केलें आहे, कीं अई वरील चौरस अक वरील चौरसाची दुपट आहे.
म्हणून अई, ईफ ह्यां वरील चौरस, अक, कड ह्यांवरील चौरसांची दुपट आहेत. (प्र. प्र. २)

परंतु अईफ कोन काटकोन आहे,
म्हणून अफ वरील चौरस, अई, ईफ ह्यांवरील चौरसां बराबर आहे; (१.४७)
म्हणून अफ वरील चौरस, अक, कड ह्यांवरील चौरसांची दुपट आहे. (प्र. प्र. १)
परंतु अफ वरील चौरस अड, डफ ह्यांवरील चौरसां बराबर आहे, कारण अडफ कोन काटकोन आहे. (१.४७)
म्हणून अड, डफ ह्यांवरील चौरस अक, कड ह्यांवरील चौरसांची दुपट आहेत. (प्र. प्र. १)
आणि डफ, डब बराबर आहे;
म्हणून अड, डब ह्यांवरील चौरस अक, कड ह्यांवरील चौरसांची दुपट आहेत.

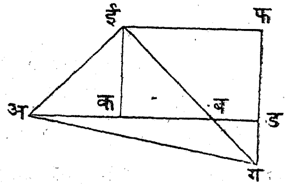
ह्याकरितां, जर एका रेघेचे इत्यादि.

सिद्धांत १०. प्रमेय.

जर एका रेघेचे दोन समान विभाग करून ती कोणत्याही एका बिंदू पर्यंत वाढविली, तर एकंदर रेघे वरील चौरस आणि वाढविलेल्या विभागावरील चौरस मिळून, अर्ध्या रेघेवरील चौरस

आणि अर्धी रेघ आणि वाढविलेला विभाग मिळून झालेल्या रेघे-वरील चौरस ह्यांच्या दुपटी बराबर होतात.

अब रेघेचे क बिंदूंत दोन समान विभाग करून ती ड बिंदूपर्यंत वाढविली आहे; तर अड आणि डब ह्यांवरील चौरस मिळून, अक आणि कड ह्यांवरील चौरसांच्या दुपटी बराबर होतील.



क बिंदूतून अब वर कई लंब काढ, (१.११)
आणि कई, अक बराबर किंवा कब बराबर कर; (१.३)
अई, ईब सांध; आणि ई बिंदूतून अब शीं ईफ समांतर काढ, आणि ड बिंदूतून कई शीं डफ समांतर काढ. (१.३१)
तेव्हां ईक, फड समांतर रेघांस ईफ मिळते, म्हणून कईफ आणि ईफड हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बराबर आहेत; (१.२९)
ह्यास्तव बईफ, ईफड हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांहून कमी आहेत.
म्हणून ईब, फड, ब आणि ड बिंदूंकडे वाढविल्यानें मिळतील. (प्र. प्र. १२)
त्या, ग बिंदूंत मिळत पर्यंत वाढीव, आणि अग सांध.

आतां अक, कई बराबर आहे, (रचना)
म्हणून कईअ कोन ईअक कोना बराबर आहे; (१.५)
आणि अकई कोन काटकोन आहे; (रचना)
म्हणून कईअ आणि ईअक ह्यांतील प्रत्येक कोन अर्धकाटकोन आहे. (१.३२)
असेंच, कईब आणि ईबक हे कोनही प्रत्येकीं अर्धकाटकोन आहेत.
म्हणून अईब कोन काटकोन आहे.

आणि ईबक कोन अर्धकाटकोन आहे, म्हणून त्या समोरचा डबग कोनही अर्धकाटकोन आहे; (१.१५)
परंतु बडग कोन काटकोन आहे, कारण, तो डकई व्युत्क्रम कोना बराबर आहे; (१.२९)

पुनः, **ईगफ** कोन अर्धकाटकोन आहे, आणि **फ** कोन काटकोन आहे,
कारण, तो त्या समोरील **ईकड** कोना बराबर आहे; (१.२८)
म्हणून शेष **फईग** कोन अर्धकाटकोन आहे, (१.३२)
आणि ह्यास्तव तो **ईगफ** कोना बराबर आहे;
म्हणून **गफ** बाजू **फई** बाजू बराबर आहे. (१.६)

आणि **ईक**, **कअ** बराबर आहे, ह्यास्तव **ईक** वरील चौरस **कअ** वरील चौरसा बराबर आहे;
म्हणून **ईक** आणि **कअ** ह्यां वरील चौरस, **कअ** वरील चौरसाची दुपट आहेत.
परंतु **अई** वरील चौरस, **ईक** आणि **कअ** ह्यां वरील चौरसां बराबर आहे. (१.४७)
म्हणून **अई** वरील चौरस **अक** वरील चौरसाची दुपट आहे.
पुनः, **गफ**, **फई** बराबर आहे, म्हणून **गफ** वरील चौरस **फई** वरील चौरसा बराबर आहे;
म्हणून **गफ** आणि **फई** ह्यांवरील चौरस, **फई** वरील चौरसाची दुपट आहेत.
परंतु **ईग** वरील चौरस, **गफ** आणि **फई** ह्यां वरील चौरसां बराबर आहे. (१.४७)
म्हणून **ईग** वरील चौरस **फई** वरील चौरसाची दुपट आहे.
आणि **फई**, **कड** बराबर आहे, (१.३४)
म्हणून **ईग** वरील चौरस **कड** वरील चौरसाची दुपट आहे.
पण **अई** वरील चौरस **अक** वरील चौरसाची दुपट आहे हें वर दाखविलें आहे.
म्हणून **अई** व **ईग** ह्यां वरील चौरस, **अक** आणि **कड** ह्यां वरील चौरसांची दुपट आहेत.

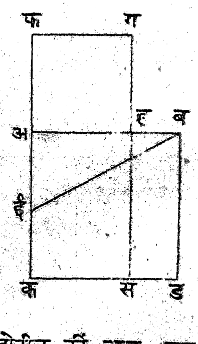
परंतु **अग** वरील चौरस **अई**, **ईग** ह्यां वरील चौरसां बराबर आहे. (१.४७)

म्हणून अग वरील चौरस अक, कड ह्यां वरील चौरसांची दुपट आहे.
पण अड, डग ह्यां वरील चौरस, अग वरील चौरसा बरावर आहेत. (१.४७)
म्हणून अड, डग ह्यां वरील चौरस अक, कड ह्यां वरील चौरसांची दुपट आहेत.
आणि डग, डब बराबर आहे;
ह्यास्तव अड आणि डब ह्यांवरील चौरस, अक आणि कड ह्यांवरील चौरसांची दुपट आहेत,
ह्याकरितां, जर एका रेघेचे इत्यादि.

सिद्धांत ११. कृत्य.

दिलेली सगळी रेघ आणि तिचा कोणताही एक विभाग ह्यांनीं झालेला काटकोन चौकोन, दुसऱ्या विभागा वरील चौरसा बराबर होईल असे तिचे दोन विभाग करावयाचे.

अब एक दिलेली रेघ आहे; तर तिचे असे दोन विभाग करावयाचे आहेत कीं सगळी रेघ आणि कोणताही एक विभाग ह्यांनीं झालेला काटकोन चौकोन, दुसऱ्या विभागा वरील चौरसा बराबर होईल.



अब वर अबडक चौरस काढ; (१.४६)
अक रेघ ई बिंदूंत दुभाग; (१.१०)
बई सांध; आणि कअ वाढवून ईफ, ईब बराबर कर; (१.३)
आणि अफ वर अफगह चौरस काढ; (१.४६)
तर ह बिंदूंत अब रेघेचे असे दोन विभाग होतील कीं अब, बह काटकोन चौकोन, अह वरील चौरसा बराबर होईल.

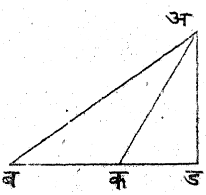
वरील चौरस मिळून, ईफ वरील चौरसा बराबर आहेत. (२.६)
परंतु ईफ, ईब बराबर आहे, (रचना)
म्हणून कफ, फभ काटकोन चौकोन आणि अई वरील चौरस मिळून, ईब वरील चौरसा बराबर आहेत.
परंतु ईब वरील चौरस, अई, अब ह्यां वरील चौरसां बराबर आहे, कारण ईअब कोन काटकोन आहे. (१. ४७)
म्हणून कफ, फभ काटकोन चौकोन आणि अई वरील चौरस मिळून, अई आणि अब ह्यां वरील चौरसां बराबर आहेत.
ह्यांतील प्रत्येकांतून दोहोंस साधारण अई वरील चौरस काढून टाक; म्हणून शेष कफ, फभ काटकोन चौकोन, शेष अब वरील चौरसा बराबर आहे. (प्र. प्र. ३)
पण फस काटकोन चौकोन कफ, फभ ह्या बाजूंनीं झालेला आहे, कारण फग, फभ बराबर आहे; (१. व्याख्या ३०)
आणि अड चौरस अब वर काढलेला आहे;
म्हणून फस काटकोन चौकोन अड चौरसा बराबर आहे.
दोहोंस साधारण अस काटकोन चौकोन प्रत्येकांतून काढून टाक; म्हणून शेष फह, शेष हड बराबर आहे. (प्र. प्र. ३)
पण हड काटकोन चौकोन अब आणि बह ह्यांनीं झाला आहे, कारण अब, बड बराबर आहे; (१. व्याख्या ३०)
आणि फह चौरस अह वर काढलेला आहे;
म्हणून अब, बह काटकोन चौकोन अह वरील चौरसा बराबर आहे.

ह्याकरितां, दिलेल्या अब रेषेचे ह बिंदूंत असे दोन विभाग केले आहेत कीं अब, बह काटकोन चौकोन अह वरील चौरसा बराबर आहे.

सिद्धांत १२. प्रमेय.

विशालकोन त्रिकोणांत कोणत्याही एका लघु कोना समोरील बाजू वाढवून तीवर त्या लघु कोना पासून लंब काढला, तर विशाल कोना समोरील बाजूवरील चौरस, विशाल कोना जवळच्या बाजूं वरील चौरसांहून, ज्या लघु कोना पासून लंब काढला असेल त्या समोरील बाजू आणि लंबाच्या व विशाल कोनाच्या मध्यें सांपडलेली त्रिकोणा बाहेरील रेघ ह्यांनीं झालेल्या दुपट काटकोन चौकोनानें, अधिक असतो.

अबक विशालकोण त्रिकोणांत अकब कोन विशाळ आहे, आणि अ लघु कोना पासून बक वाढविलेल्या बाजूवर अड लंब काढला आहे; तर अब वरील चौरस, अक आणि कब ह्यांवरील चौरसां पेक्षां दुपट बक, कड काटकोन चौकोनानें मोठा होईल.



क बिंदूंत बड रेघेचे दोन विभाग झाले आहेत, म्हणून बड वरील चौरस, बक आणि कड ह्यां वरील चौरस आणि दुपट बक, कड काटकोन चौकोन ह्यां बराबर आहे. (२.४)

ह्यांतील प्रत्येकांत डअ वरील चौरस मिळींव.

म्हणून बड व डअ ह्यांवरील चौरस, बक, कड, डअ ह्यांवरील चौरस आणि दुपट बक, कड काटकोन चौकोन ह्यां बराबर आहेत. (प्र. प्र. २)

परंतु अडब कोन काटकोन आहे,

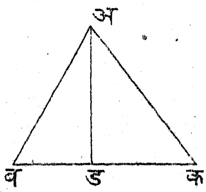
म्हणून बअ वरील चौरस बड, डअ ह्यांवरील चौरसां बराबर आहे; आणि कअ वरील चौरस कड, डअ ह्यांवरील चौरसां बराबर आहे. (१.४७)

म्हणून बअ वरील चौरस, बक व कअ ह्यां वरील चौरस आणि दुपट बक, कड काटकोन चौकोन ह्यां बराबर आहे;

सिद्धांत १३. प्रमेय.

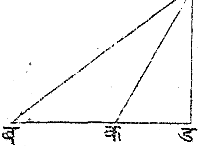
कोणत्याही त्रिकोणांत लघु कोना समोरील बाजूवरील चौरस, लघु कोना जवळच्या दोन बाजूं वरील चौरसांहून, त्या बाजूं पैकीं एक आणि तीवर, समोरील कोना पासून काढलेला लंब आणि लघु कोन ह्यांच्या मधील रेघ, ह्यांनीं झालेल्या दुपट काटकोन-चौकोनानें कमी असतो.

अबक त्रिकोणाचा ब कोन लघु आहे, आणि त्या जवळच्या एका बक बाजू वर समोरील कोना पासून अड लंब काढला आहे; तर ब कोना समोरील अक बाजू वरील चौरस, दुसऱ्या दोन कब, बअ बाजूं वरील चौरसां पेक्षां, दुपट कब, बड काटकोन चौकोनानें कमी होईल.



(१) जेव्हां अड लंब अबक त्रिकोणांत पडतो, तेव्हां कब रेघ ड बिंदूंत विभागली आहे, म्हणून कब आणि बड ह्यां वरील चौरस, दुपट कब, बड काटकोन चौकोन आणि कड वरील चौरस ह्यां बराबर आहेत. (२. ७)
ह्या प्रत्येकांत डअ वरील चौरस मिळीव.
म्हणून कब, बड, आणि डअ ह्यांवरील चौरस मिळून, दुपट कब, बड काटकोन चौकोन, आणि कड आणि डअ ह्यांवरील चौरस ह्यां बराबर आहेत. (प्र. प्र. २)
परंतु बडअ कोन काटकोन आहे, म्हणून अब वरील चौरस, बड आणि डअ ह्यां वरील चौरसां बराबर आहे; (१. ४७)
आणि अक वरील चौरस, कड आणि डअ ह्यां वरील चौरसां बराबर आहे, कारण, अडक कोन काटकोन आहे. (१. ४७)
म्हणून कब आणि बअ ह्यांवरील चौरस मिळून, अक वरील चौरस आणि दुपट कब, बड काटकोन चौकोन ह्यां बराबर आहेत;

कोणा बाहेर पडतो, तेव्हां ड कोन काटकोन आहे, (रचना)
ह्यास्तव अकब कोन काटकोना पेक्षां मोठा म्हणजे विशाल आहे. (१. १६)
म्हणून अब वरील चौरस, अक आणि



कब ह्यां वरील चौरस आणि दुपट बक, कड काटकोन चौकोन ह्यां बराबर आहे. (२. १२)
प्रत्येकास बक वरील चौरस मिळीव.
म्हणून अब आणि बक ह्यां वरील चौरस, अक वरील चौरस आणि दुपट बक वरील चौरस आणि दुपट बक, कड काटकोन-चौकोन ह्यां बराबर आहेत. (प्र. प्र. २)
परंतु बड रेष क बिंदूंत विभागली आहे,
ह्यास्तव डब, बक काटकोन चौकोन, बक, कड काटकोन चौकोन आणि बक वरील चौरस ह्यां बराबर आहे. (२.३)
म्हणून दुपट डब, बक काटकोन चौकोन, दुपट बक, कड काटकोन चौकोन आणि दुपट बक वरील चौरस ह्यां बराबर आहे. (प्र. प्र. ६)
म्हणून अब आणि बक ह्यां वरील चौरस, अक वरील चौरस आणि दुपट डब, बक काटकोन चौकोन ह्यां बराबर आहे; (प्र. प्र. १)
म्हणजे अक वरील चौरस, अब आणि बक ह्यां वरील चौरसां पेक्षां दुपट डब, बक काटकोन चौकोनानें लहान आहे.

(२) जेव्हां, अक रेष बक रेषे वर लंब असते, तेव्हां बक रेष, लंब आणि ब लघुकोन ह्यांच्या मध्ये येते; आणि अब आणि बक ह्यां वरील चौरस, अक वरील चौरस आणि दुपट बक वरील चौरस ह्यां बराबर आहेत हें स्पष्टच आहे. (१. ४७, व प्र.प्र. २)



ह्याकरितां, लघुकोण त्रिकोणांत इत्यादि.

सिद्धांत १४. कृत्य.

दिलेल्या सरळ रेषाकृती बराबर एक चौरस काढावयाचें.

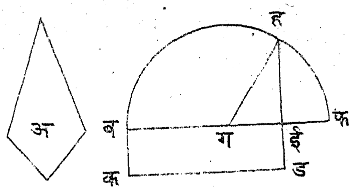
अ एक दिलेली सरळ रेषाकृति आहे, तर तीबराबर एक चौरस काढावयाचा आहे.

बकडई काटकोन समांतरभुज चौकोन अ सरळ रेषाकृती बराबर काढ. (१.४५)

तेव्हां जर **बई** आणि **ईड** बाजू परस्पर बराबर आहेत, तर **बकडई** काटकोन चौकोन चौरस आहे, आणि अर्थातच कृत्य पुरें झालें.

परंतु त्या बाजू जर बराबर नाहींत, तर त्यांतून एक **बई** बाजू **फ** बिंदू पर्यंत वाढीव, आणि **ईफ**, **ईड** बराबर कर, (१.३)

आणि **बफ**, **ग** मध्यें दुभाग; (१.१०)



आणि **ग** मध्यापासून **गब** अथवा **गफ** अंतरानें **बहफ** अर्धवर्तुळ काढ, आणि **डई** बाजू **ह** बिंदू पर्यंत वाढीव.

म्हणजे **ईह** वरील चौरस **अ** सरळ रेषाकृतीबराबर होईल.

गह सांध. तेव्हां **बफ**चे **ग** बिंदूंत दोन समान विभाग, आणि **ई** बिंदूंत दोन असमान विभाग झाले आहेत, म्हणून **बई**, **ईफ** काटकोन-चौकोन आणि **गई** वरील चौरस मिळून, **गफ** वरील चौरसा बराबर आहेत. (२.५)

पण **गफ**, **गह** बराबर आहे. (१. व्याख्या १५)

म्हणून **बई**, **ईफ** काटकोन चौकोन आणि **गई** वरील चौरस, **गह** वरील चौरसा बराबर आहेत.

परंतु **गह** वरील चौरस, **गई** आणि **ईह** ह्यांवरील चौरसां बराबर आहे; (१.४७)

म्हणून **बई**, **ईफ** काटकोन चौकोन आणि **गई** वरील चौरस मिळून, **गई** आणि **ईह** ह्यां वरील चौरसां बराबर आहेत.

ह्या प्रत्येकांतून दोहोंत साधारण गई वरील चौरस काढून टाक;
म्हणून बई, ईफ काटकोन चौकोन, ईह वरील चौरसा बराबर आहे. (प्र.प्र. ३)

परंतु बई, ईफ ह्यांनीं झालेला काटकोन चौकोन बड समांतरभुज चौकोन आहे,

कारण, ईफ, ईड बराबर आहे. (रचना)

म्हणून बड काटकोन समांतरभुज चौकोन, ईह वरील चौरसा बराबर आहे.

पण बड काटकोन चौकोन अ सरळ रेषाकृतीबराबर आहे. (रचना)

म्हणून ईह वरील चौरस अ सरळ रेषाकृतीबराबर आहे.

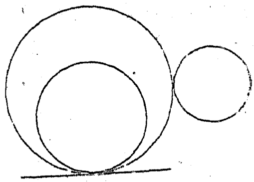
ह्याकरितां, दिलेल्या अ सरळ रेषाकृती बराबर ईह वरील चौरस काढला आहे.

तिसरें पुस्तक.

व्याख्या.

१. ज्या वर्तुळांचे व्यास बराबर असतात, अथवा ज्यांच्या मध्यांपासून परिघा पर्यंत काढलेल्या रेघा म्हणजे त्रिज्या बराबर असतात त्यांस **समानवर्तुळें** म्हणतात.

ही व्याख्या नव्हे, परंतु प्रमेय आहे; आणि ह्याची सिद्धता उघड आहे. कारण, जर तीं वर्तुळें मध्य एकच होत अशीं एकमेकांवर ठेविलीं, तर त्यांच्या त्रिज्या बराबर आहेत म्हणून तीं मिळतीलच.

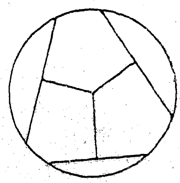


२. जेव्हां एक रेघ वर्तुळास मिळते, पण वाढविली असतां त्यास कापीत नाहीं, तेव्हां तिला **स्पर्शरेषा** म्हणतात.

३. जीं वर्तुळें एकमेकांस मिळतात, पण कापीत नाहींत त्यांस **स्पर्शक** वर्तुळें म्हणतात.

(ज्या बिंदूंत त्यांचा स्पर्श होतो त्यास **स्पर्शबिंदु** म्हणतात.)

४. ज्या रेघांवर वर्तुळाच्या मध्या पासून काढलेले लंब बराबर असतात त्या रेघांस **समदूर** रेषा म्हणतात.



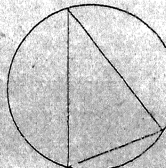
५. आणि एका रेघेवर वर्तुळमध्यापासून काढलेला लंब, दुसऱ्या रेघेवर काढलेल्या लंबा पेक्षां मोठा असतो, तेव्हां पहिलीस **दूरतर** रेषा म्हणतात.

६. सरळ रेघ व तिनें कापलेला वर्तुळाचा परिघ ह्यांच्या मध्यें जी आकृति येते तीस **वर्तुलखंड** म्हणतात.



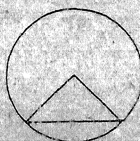
रेघेनें वर्तुळास कापल्यानें जे दोन वर्तुलखंड पडतात त्यांतील एकास दुसऱ्याचा **व्युत्क्रमखंड** म्हणतात.

७. वर्तुलखंडाचा परिघ आणि रेघ ह्यांच्या मध्यें जो कोन सांपडतो त्यास **वर्तुलखंडाचा कोन** म्हणतात.

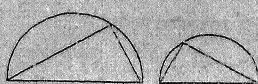


८. वर्तुलखंडाच्या परिघांतील एक बिंदू पासून रेघेच्या टोंका पर्यंत दोन रेघा काढल्या असतां, त्यांच्या मधील कोनास **वर्तुलखंडांतील कोन** म्हणतात.

९. आणि ज्या रेघांनीं वर्तुलखंडांतील कोन होतो त्यांच्या मध्यें सांपडलेल्या परिघावर तो कोन आहे असेंही म्हणतात.



१०. वर्तुळाच्या मध्या पासून परिघा पर्यंत काढलेल्या दोन रेघा आणि त्यांच्या मध्यें सांपडलेला परिघ ह्यांनीं जी आकृति होते तिला **वर्तुलविभाग** म्हणतात.



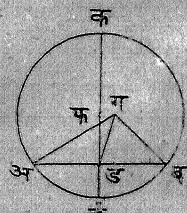
११. ज्या वर्तुलखंडांतील कोन समान असतात त्यांस **सरूप वर्तुलखंड** म्हणतात.

[**सूचना.**—पुढील सिद्धांतांत 'मध्या पासून रेघा', किंवा 'मध्या पासून काढलेल्या रेघा', असे शब्द जेव्हां येतात तेव्हां परिघापर्यंत काढलेल्या रेघा म्हणजे त्रिज्या असें समजावें. परिघाच्या भागास कौंस म्हणतात.]

सिद्धांत १. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुळाचा मध्य काढावयाचें.

अबक एक दिलेलें वर्तुळ आहे; तर त्याचा मध्य काढावयाचा आहे.



अबक वर्तुळांत अब रेघ काढ, आणि ती ड बिंदूंत दुभाग; (१.१०)
आणि ड बिंदूतून अब वर डक लंब काढून, (१.११)
तो परिघास ई बिंदूंत मिळे पर्यंत वाढीव, आणि कई, फ बिंदूंत दुभाग. (१.१०)
फ बिंदु अबक वर्तुळाचा मध्य होईल.

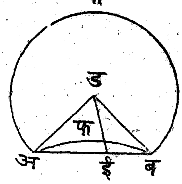
कारण, जर **फ** मध्य नसेल, तर **ग** मध्य आहे असें मान, आणि **गअ**, **गड**, **गब** सांध.
तेव्हां **डअ** बाजू **डब** बाजू बराबर आहे, (रचना)
आणि **डग**, **अडग** आणि **बडग** त्रिकोणांस साधारण आहे;
म्हणून **अड**, **डग** ह्या दोन बाजू **बड**, **डग** ह्या दोन बाजूंशीं अनुक्रमें बराबर आहेत;
आणि **गअ** पाया **गब** पाया बराबर आहे, कारण, ते **ग** मध्यापासून काढलेले आहेत; (१. व्याख्या १५)
म्हणून **अडग** कोन **बडग** कोना बराबर आहे. (१.८)
म्हणून **बडग** कोन काटकोन आहे. (१. व्याख्या १०)
परंतु **बडफ** कोनही काटकोन आहे. (रचना)
म्हणून **बडग** कोन **बडफ** कोना बराबर आहे, (प्र. प्र. ११)
म्हणजे लहान कोन मोठ्या कोना बराबर आहे, परंतु हें होणें अशक्य आहे.
म्हणून **ग** बिंदु **अबक** वर्तुळाचा मध्य नाहीं.

ह्याच प्रमाणें, **कई** बाहेर दुसरा कोणताही बिंदु मध्य नाहीं, असें दाखवितां येईल.
आणि **कई**, **फ** बिंदूंत दुभागली आहे, आणि दुसऱ्या बिंदूंत तिचे असमान भाग होतील, ह्यास्तव तो दुसरा बिंदु मध्य होणार नाहीं.
म्हणून **फ** शिवाय दुसरा कोणताही बिंदु मध्य नाहीं.
ह्याकरितां, **फ** बिंदु **अबक** वर्तुळाचा मध्य आहे.
आणि तोच काढावयाचा होता.

कुरलरी. ह्यावरून असें उघड होतें कीं वर्तुळांत एक रेघ दुसरीवर लंब असून तीस दुभागते, तर त्या दुभागणाऱ्या रेघेंत वर्तुळाचा मध्यबिंदु असतो.

सिद्धांत २. प्रमेय.

जर वर्तुळाच्या परिघांत कोणतेही दोन बिंदु घेतले, तर ते सांधणारी रेघ वर्तुळांतच पडते.



अबक एक वर्तुळ आहे, आणि अ आणि ब त्याच्या परिघांत दोन बिंदु आहेत; तर अ पासून ब पर्यंत काढलेली रेघ वर्तुळांतच पडेल.

कारण, जर ती आंत पडत नसेल, तर बाहेर अईब अशा स्थितीनें पडते असें समज.

अबक वर्तुळाचा ड मध्य काढ; (३.१)
आणि डअ, डब सांध; अब कौंसांत फ बिंदु घे; आणि डफ सांध, आणि ती अब रेषेस ई बिंदूंत मिळेपर्यंत वाढीव.
तेव्हां डअ आणि डब परस्पर बराबर आहेत; (१. व्याख्या १५)
म्हणून डअब कोन डबअ कोना बराबर आहे. (१.५)
आणि डअई त्रिकोणाची अई बाजू ब बिंदूपर्यंत वाढविली आहे,
ह्यास्तव डईब बाहेरील कोन, त्याच्या आंतल्या समोरील डअई कोनापेक्षां मोठा आहे. (१.१६)
पण डअई कोन डबई कोना बराबर आहे असें वर दाखविलें आहे;
म्हणून डईब कोन डबई कोनापेक्षां मोठा आहे.
ह्यास्तव डब, डई पेक्षां मोठी आहे. (१.१९)
पण डब, डफ बराबर आहे. (१. व्याख्या १५)
म्हणून डफ, डई पेक्षां मोठी आहे,
म्हणजे लहान रेघ मोठ्या रेघेहून मोठी आहे, आणि हें होणें अशक्य आहे,
म्हणून अ आणि ब बिंदूंस सांधणारी रेघ वर्तुळाच्या बाहेर पडत नाहीं.

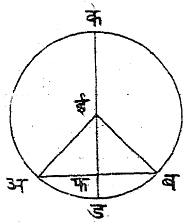
ह्याचप्रमाणें, ती वर्तुळाच्या परिघावर पडणार नाहीं, असेंही दाखवितां येईल.
म्हणून ती आंतच पडते.

ह्याकरितां, जर वर्तुळाच्या इत्यादि.

सिद्धांत ३. प्रमेय.

जर वर्तुळाच्या मध्यांतून जाणारी रेघ, मध्यांतून न जाणाऱ्या रेघेस दुभागते, तर पहिली दुसरीवर लंब होते; आणि जर पहिली दुसरीवर लंब आहे, तर ती दुसरीस दुभागते.

अबक एक वर्तुळ आहे; आणि मध्यांतून काढलेली कड रेघ, मध्यांतून न जाणाऱ्या अब रेघेस फ बिंदूंत दुभागते; तर कड रेघ अब रेघेवर लंब होईल.



वर्तुळाचा ई मध्य काढ, (३.१)
आणि ईअ, ईब सांध.

तेव्हां अफ, फब बराबर आहे, (प्रतिज्ञा)
आणि अफई आणि बफई त्रिकोणांस फई साधारण आहे;
म्हणून अफ, फई बाजू बफ, फई बाजूंशीं अनुक्रमें बराबर आहेत, आणि ईअ पाया ईब पाया बराबर आहे; (१. व्याख्या १५)
म्हणून अफई कोन बफई कोनाबराबर आहे. (१.८)
ह्यास्तव ते प्रत्येकीं काटकोन आहेत;
म्हणजे कड, अब वर लंब आहे. (१. व्याख्या १०)
म्हणून मध्यांतून काढलेली व मध्यांतून न जाणाऱ्या अब रेघेस दुभागणारी कड रेघ अब वर लंबही आहे.

परंतु जर कड रेघ अब रेघेवर लंब आहे; तर कड रेघ अब रेघेस दुभागील, म्हणजे अफ, फब बराबर होईल.

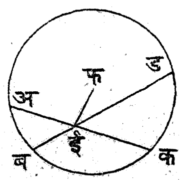
पूर्वी प्रमाणें आकृति करून,
ईअ, ईब बराबर आहे, (१. व्याख्या १५)
म्हणून ईअफ कोन ईबफ कोना बराबर आहे; (१.५)
आणि अफई काटकोन, बफई काटकोना बराबर आहे. (१. व्याख्या १०, व प्र. प्र. ११)
म्हणून ईअफ आणि ईबफ त्रिकोणांत एकाचे दोन कोन प्रत्येकीं दुसऱ्याच्या दोन कोनां बराबर आहेत;

आणि प्रत्येक त्रिकोणांत बराबर कोनांतून एका समोरील बाजू ईफ दोहोंस साधारण आहे, म्हणून त्यांच्या दुसऱ्या बाजू बराबर आहेत; (१. २६)
म्हणून अफ, फब बराबर आहे.

ह्याकरितां, जर वर्तुळाच्या मध्यांतून जाणारी रेघ इत्यादि.

सिद्धांत ४. प्रमेय.

जर वर्तुळांत दोन रेघा एकमेकींस छेदितात, परंतु त्या दोनही वर्तुलमध्यांतून जात नाहींत, तर त्या एकमेकींस दुभागीत नाहींत.



अबकड वर्तुळांत अक आणि बड ह्या दोन रेघा एकमेकींस ई बिंदूंत छेदितात; परंतु त्या दोनही, वर्तुलमध्यांतून जात नाहींत; तर अक आणि बड एकमेकींस दुभागणार नाहींत.

जर दोहोंतून एक रेघ, मध्यांतून जाते, तर तिचे दोन समान भाग, मध्यांतून न जाणाऱ्या रेघेनें होणार नाहींत हें उघडच आहे.
परंतु जर दोन रेघांतून एकही मध्यांतून जात नसतां, शक्य असेल तर अई, ईक बराबर, आणि बई, ईड बराबर आहे असें मान.
अबकड वर्तुळाचा फ मध्य काढ, (३.१)
आणि ईफ सांध.

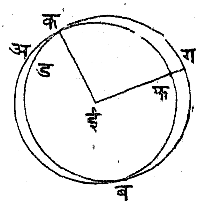
तेव्हां मध्यांतून जाणारी फई रेघ, मध्यांतून न जाणाऱ्या अक रेघेचे दोन समान भाग करिते; (प्रतिज्ञा)
ह्यास्तव फई रेघ अक रेघेवर लंब आहे; (३.३)
म्हणून फईअ कोन काटकोन आहे. (१. व्याख्या १०)
पुनः मध्यांतून जाणारी फई रेघ, मध्यांतून न जाणाऱ्या बड रेघेचे दोन समान भाग करिते, (प्रतिज्ञा)
ह्यास्तव फई रेघ बड रेघेवर लंब आहे; (३.३)
म्हणून फईब कोन काटकोन आहे. (१. व्याख्या १०)
परंतु फईअ कोनही काटकोन आहे, असें वर दाखविलें आहे;
म्हणून फईअ कोन फईब कोना बराबर आहे. (प्र. प्र. ११)

म्हणजे लहान कोन मोठ्या कोना बरोबर आहे,
परंतु हें होणें अशक्य आहे.
ह्यास्तव अक, बड एकमेकीस दुभागीत नाहींत.
ह्याकरितां, जर वर्तुळांत इत्यादि.

सिद्धांत ५. प्रमेय.

जर दोन वर्तुळें एकमेकास छेदितात, तर त्यांस एकच मध्य असत नाहीं.

अबक आणि कडग हीं दोन वर्तुळें एकमेकास ब आणि क बिंदूंत छेदितात, तर त्यांस एकच मध्य असणार नाहीं.



कारण, जर ह्या दोन्ही वर्तुळांस एक मध्य संभवत असेल, तर तो ई आहे असें मान; ईक सांध, आणि दोघांच्या परिघांस फ आणि ग बिंदूंत छेदणारी ईफग रेघ काढ.

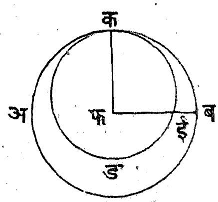
तेव्हां अबक वर्तुळाचा ई मध्य आहे,
ह्यास्तव ईक, ईफ बरोबर आहे, (१. व्याख्या १५)
आणि कडग वर्तुळाचा ई मध्य आहे,
ह्यास्तव ईक, ईग बरोबर आहे, (१. व्याख्या १५)
पण ईक, ईफ बरोबर आहे असें वर दाखविलें आहे;
म्हणून ईफ, ईग बरोबर आहे, (प्र. प्र. १)
म्हणजे लहान रेघ मोठ्या रेघे बरोबर आहे, परंतु हें होणें अशक्य आहे.
म्हणून अबक आणि कडग ह्या दोन वर्तुळांचा ई मध्य नाहीं.
ह्याकरितां, जर दोन वर्तुळें इत्यादि.

सिद्धांत ६. प्रमेय.

जर दोन वर्तुळें एकमेकास आंतल्या बाजूनें स्पर्श करितात, तर त्यांस एकच मध्य असत नाहीं.

अबक आणि कडई हीं दोन वर्तुळें एकमेकास आंतून क बिंदूशीं स्पर्श

करितात ; तर त्यांस एकच मध्य असणार नाहीं.



कारण, जर ह्या दोन वर्तुळांस एकच मध्य संभवत असेल, तर तो फ आहे असें मान ; फक सांध, आणि दोघांच्या परिघांस ई आणि ब बिंदूंत छेदणारी फईब रेघ काढ.

तेव्हां अबक वर्तुळाचा फ मध्य आहे,
म्हणून फक, फब बराबर आहे, (१. व्याख्या १५)
आणि कडई वर्तुळाचा फ मध्य आहे,
म्हणून फक, फई बराबर आहे. (१. व्याख्या १५)
परंतु फक, फब बराबर आहे असें वर दाखविलें आहे ;
म्हणून फई, फब बराबर आहे, (प्र.प्र. १)
म्हणजे लहान रेघ मोठ्या रेघे बराबर आहे ; परंतु हें होणें अशक्य आहे.
म्हणून अबक आणि कडई ह्या दोन वर्तुळांचा फ मध्य नाहीं.

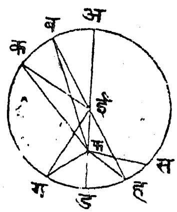
ह्याकरितां, जर दोन वर्तुळें इत्यादि.

सिद्धांत ७. प्रमेय.

वर्तुळाच्या व्यासांत मध्यबिंदू शिवाय दुसरा एक बिंदु घेऊन, त्यापासून परिघापर्यंत ज्या अनेक रेघा काढितां येतात त्या सर्वांत, ज्या रेघेंत मध्यबिंदु असतो, ती मोठी असते, आणि व्यासाचा दुसरा भाग त्या सर्वांत लहान असतो ; आणि दुसऱ्या रेघांत मध्यबिंदूतून जाणाऱ्या रेघे जवळची रेघ दूरच्या रेघेहून मोठी असते ; आणि त्या बिंदू पासून सर्वांत लहान म्हणजे लघुतम रेघेच्या एकेका अंगास एकेक अशा दोनच समान रेघा काढतां येतात.

अबकड वर्तुळाचा अड व्यास आहे, आणि ई मध्यबिंदु आहे ; अड व्यासांत फ बिंदु घेऊन त्यापासून फब, फक, फग, इत्यादि रेघा काढल्या आहेत ; तर ई मध्यबिंदूतून जाणारी फअ रेघ सर्वांत मोठी म्हणजे महत्तम होईल, आणि अड व्यासाचा दुसरा भाग फड

लघुतम होईल: आणि दुसऱ्या रेघांत फब, फक पेक्षां, आणि फक, फग पेक्षां मोठी होईल.



बई, कई, गई, सांध.

तेव्हां बईफ त्रिकोणांत बई व ईफ मिळून, बफ हून अधिक आहेत. (१.२०)

परंतु बई, अई बराबर आहे ; (१. व्याख्या १५)

म्हणून अई आणि ईफ मिळून, बफ हून अधिक आहेत,

म्हणजे अफ, बफ पेक्षां अधिक आहे.

पुनः, बई, कई बराबर आहे, (१. व्याख्या १५)

आणि बईफ आणि कईफ ह्या दोन त्रिकोणांस ईफ साधारण आहे;

म्हणून बई, ईफ ह्या दोन बाजू प्रत्येकीं कई, ईफ ह्या दोन बाजूं बराबर आहेत,

परंतु बईफ कोन कईफ कोनाहून मोठा आहे;

म्हणून फब पाया फक पायाहून मोठा आहे. (१.२४)

ह्याप्रमाणेंच असें दाखवितां येईल कीं फक, फग पेक्षां अधिक आहे.

पुन: गफ आणि फई मिळून, ईग पेक्षां अधिक आहेत, (१.२०)

आणि ईग, ईड बराबर आहे, (१. व्याख्या १५)

म्हणून गफ, ईफ मिळून, ईड पेक्षां अधिक आहेत.

दोहोंस साधारण ईफ रेघ काढून टाक,

म्हणून शेष गफ, शेष फड पेक्षां अधिक आहे.

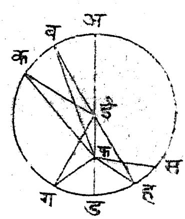
म्हणून फ पासून परिघापर्यंत काढलेल्या सर्व रेघांत फअ मोठी, आणि फड लहान आहे; आणि फब, फक पेक्षां, आणि फक, फग पेक्षां मोठी आहे.

आणखी, फ बिंदूपासून परिघापर्यंत फड लघुतमरेघेच्या एकेका अंगास एकेक अशा समान दोनच रेघा काढतां येतात.

कारण, ईफ रेघेंत ई बिंदूशीं फईग कोनाबराबर फईह कोन कर, (१.२३)

आणि फह सांध.

तेव्हां ईग, ईह बराबर आहे, (१. व्याख्या १५)
आणि गईफ, हईफ ह्या दोन त्रिकोणांस ईफ साधारण आहे;
म्हणून ईग, ईफ ह्या दोन बाजू प्रत्येकीं ईह, ईफ ह्या दोन बाजूं बराबर आहेत;
आणि गईफ कोन हईफ कोना बराबर आहे: (रचना)
म्हणून फग पाया फह पाया बराबर आहे. (१.४)



परंतु, फह खेरीज, फ पासून परिघापर्यंत, फग बराबर दुसरी रेघ काढतां येत नाहीं.

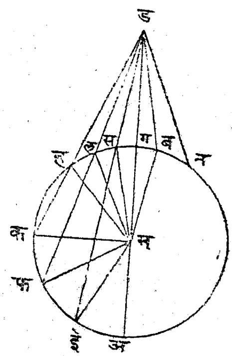
कारण, काढतां येत असल्यास फस, फग बराबर आहे असें समज.
तेव्हां फस, फग बराबर आहे, (प्रतिज्ञा)
आणि फह ही फग बराबर आहे,
म्हणून फह, फस बराबर आहे; (प्र. प्र. १)
म्हणून मध्यबिंदूंतून जाणाऱ्या फअ रेघे जवळची रेघ फस, दूरच्या फह रेघे बराबर आहे;
परंतु ही गोष्ट होणें अशक्य आहे असें वरतीं दाखविलें आहे.

ह्याकरितां, वर्तुळाच्या व्यासांत इत्यादि.

सिद्धांत ८. प्रमेय.

वर्तुळाबाहेर एक बिंदु घेऊन, त्यापासून परिघापर्यंत अनेक रेघा काढल्या, व त्यांतील एक मध्यांतून जाते; तर अंतर्वक्र परिघास मिळणाऱ्या रेघांत मध्यांतून जाणारी रेघ मोठी असते, आणि दुसऱ्या रेघांत मध्यांतून जाणाऱ्या रेघे जवळची रेघ दूरच्या रेघेहून मोठी असते; परंतु बहिर्वक्र परिघास मिळणाऱ्या रेघांत, व्यास आणि वर्तुळा बाहेरील बिंदु ह्यांच्या मधील रेघ लहान असते, आणि दुसऱ्या रेघांत लघुतम रेघे जवळची रेघ दूरच्या रेघेहून लहान असते; आणि त्या बाहेरील बिंदू पासून परिघा पर्यंत लघुतम रेघेच्या एकेका अंगास एकेक अशा दोनच समान रेघा काढतां येतात.

अबक वर्तुळ आहे, व त्या बाहेर ड बिंदु घेऊन त्यापासून परिघापर्यंत डअ, डई, डफ, डक रेघा काढल्या आहेत, व त्यांतील डअ मध्यांतून जाते; तर अईफक अंतर्वक्र परिघास मिळणाऱ्या सर्व रेघांत मध्यांतून जाणारी डअ मोठी होईल, आणि डअ जवळची डई, दूरच्या डफ हून मोठी, आणि डफ, डक हून मोठी होईल; परंतु गसलह बहिर्वक्र परिघास मिळणाऱ्या सर्व रेघांत, ड बिंदु आणि अग व्यास ह्यांच्या मधील डग रेघ लहान होईल, आणि डग जवळची डस, दूरच्या डल हून, आणि डल, डह हून लहान होईल.



अबक वर्तुळाचा म मध्य काढ, (३.१)
आणि मई, मफ, मक, मह, मल, मस, सांध.

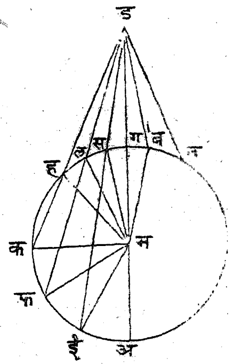
तेव्हां ईमड त्रिकोणांत ईम, मड मिळून, ईड पेक्षां अधिक आहेत. (१.२०)
परंतु ईम, अम बराबर आहे;
(१. व्याख्या १५)
म्हणून अम, मड मिळून, ईड हून अधिक आहेत.
म्हणजे अड, ईड हून अधिक आहे.

पुनः, ईम, फम बराबर आहे,
(१. व्याख्या १५)
आणि मड, ईमड आणि फमड ह्या दोन त्रिकोणांस साधारण आहे;
म्हणून ईम, मड ह्या दोन बाजू प्रत्येकी फम, मड ह्या दोन बाजू बराबर आहेत;
परंतु ईमड कोन फमड कोनाहून मोठा आहे;
म्हणून ईड पाया फड पायाहून मोठा आहे. (१.२४)

ह्याच रीतीनें असें दाखवितां येईल कीं फड, कड हून अधिक आहे.
म्हणून डअ महत्तम आहे, आणि डई, डफ हून अधिक, आणि डफ, डक हून अधिक आहे.

पुनः मस, सड मिळून, मड हून अधिक आहेत, (१. २०)
आणि मस, मग बराबर आहे, (१. व्याख्या १५)

म्हणून शेष सड, शेष गड हून मोठी आहे, (प्र. प्र. ५)
म्हणजे गड, सड हून लहान आहे.



आणि मलड त्रिकोणांत मड बाजूचे म, ड, ह्या टोकांपासून त्रिकोणांतील स बिंदूपर्यंत मस, डस रेघा काढल्या आहेत,
म्हणून मस, सड मिळून मल, लड ह्यांपेक्षां कमी आहेत; (१.२१)
आणि मस, मल बराबर आहे, (१. व्याख्या १५)
म्हणून शेष सड, शेष लड हून कमी आहे. (प्र. प्र. ५)

ह्याचप्रमाणें असें दाखवितां येईल कीं लड, हड हून कमी आहे.
म्हणून डग लघुतम आहे, आणि डस, डल हून, आणि डल, डह हून कमी आहे.

आणखी, ड पासून परिघापर्यंत, लघुतम रेघेच्या एकेक अंगास एकेक अशा दोनच समान रेघा काढतां येतात.

कारण, मड रेघेंत म बिंदूशीं डमस कोना बराबर डमब कोन कर, आणि डब सांध. (१.२३)

तेव्हां मस, मब बराबर आहे, (१. व्याख्या १५)
आणि समड, बमड त्रिकोणांस मड साधारण आहे,
म्हणून सम, मड ह्या दोन बाजू प्रत्येकीं बम, मड ह्या दोन बाजूं बराबर आहेत,
आणि डमस कोन डमब कोना बराबर आहे; (रचना)
म्हणून डस पाया डब पाया बराबर आहे. (१.४)

परंतु ड पासून परिघा पर्यंत डस बराबर डब खेरीज दुसरी रेघ काढतांच येत नाहीं.

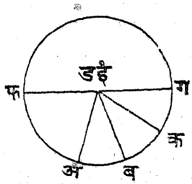
कारण, काढतां येत असल्यास डस बराबर डन आहे असें समज.
तेव्हां डन, डस बराबर आहे,

आणि डब ही डस बराबर आहे,
म्हणून डब, डन बराबर आहे; (प्र. प्र.१)
म्हणजे लघुतम डग रेषे जवळची डब रेघ, दूरच्या डन रेघे बराबर आहे; आणि वर जें नुकतेंच सिद्ध केलें आहे त्यावरून हें होणें अशक्य आहे.

ह्याकरितां, वर्तुळा बाहेर एक बिंदु इत्यादि.

सिद्धांत ९. प्रमेय.

वर्तुळांत ज्या एका बिंदू पासून परिघा पर्यंत दोहों पेक्षां अधिक समान रेघा निघतात, तो बिंदु वर्तुळाचा मध्य असतो.



अबक वर्तुळांत ड बिंदू पासून परिघापर्यंत दोहोंपेक्षां अधिक रेघा म्हणजे डअ, डब, डक निघतात, तर तो ड बिंदु वर्तुळाचा मध्य होईल.

कारण, जर ड बिंदु वर्तुळाचा मध्य नसेल, तर ई बिंदु मध्य आहे असें मान; डई सांध, आणि ती दोहों बाजूंनीं परिघास फ आणि ग बिंदूंशीं मिळेपर्यंत वाढीव, तेव्हां फग वर्तुळाचा व्यास आहे.

आतां **अबक** वर्तुळाचा फग व्यास आहे, आणि त्यांत ड बिंदु मध्यबिंदु नाहीं, असें मानलें आहे;
ह्यास्तव डग सर्व रेघांत मोठी आहे, आणि डक, डब पेक्षां मोठी आहे,
आणि डब, डअ पेक्षां मोठी आहे; (३.७)
परंतु ह्या सर्व रेघा परस्पर बराबर आहेत; (प्रतिज्ञा)
आणि असें होणें अशक्य आहे.
म्हणून ई बिंदु **अबक** वर्तुळाचा मध्य नाहीं;

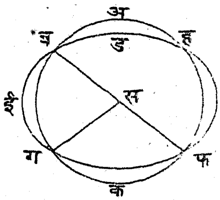
ह्याप्रमाणेंच, ड बिंदू शिवाय दुसरा कोणताही बिंदु मध्य नाहीं, असें दाखवितां येईल,
म्हणून ड बिंदु **अबक** वर्तुळाचा मध्य आहे.

ह्याकरितां, वर्तुळांत ज्या एका बिंदू पासून इत्यादि.

सिद्धांत १०. प्रमेय.

एक वर्तुळाचा परिघ दुसऱ्या वर्तुळाच्या परिघास दोहों पेक्षां अधिक बिंदूंत छेदीत नाहीं.

जर ही गोष्ट शक्य असेल, तर अबक परिघ डईफ परिघास ब, ग, फ बिंदूंत छेदितो असें मान.



अबक वर्तुळाचा स मध्य काढ; (३.१)
आणि सब, सग, सफ, सांध.

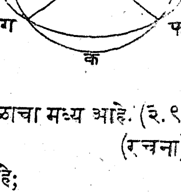
तेव्हां अबक वर्तुळाचा स मध्य आहे, म्हणून सब, सग, सफ, ह्या रेघा परस्पर बराबर आहेत, (१. व्याख्या १५)
आणि डईफ वर्तुळांत स बिंदूपासून परिघापर्यंत सब, सग, सफ ह्या तीन समान रेघा निघाल्या आहेत, ह्यास्तव स बिंदु डईफ वर्तुळाचा मध्य आहे. (३.९)
परंतु स, अबक वर्तुळाचाही मध्य आहे. (रचना)
म्हणून छेदणाऱ्या दोन वर्तुळांस एकच मध्य आहे;
पण हें होणें अशक्य आहे. (३.५)

ह्याकरितां, एक वर्तुळाचा परिघ इत्यादि.

सिद्धांत ११. प्रमेय.

जर दोन वर्तुळें एकमेकास आंतल्या बाजूनें स्पर्श करितात, तर त्यांचे मध्य सांधणारी रेघ वाढविली असतां, स्पर्श बिंदूतून जाते.

अबक आणि अडई हीं दोन वर्तुळें एकमेकास आंतल्या बाजूनें अ बिंदूशीं स्पर्श करितात; आणि अबक वर्तुळाचा फ मध्य आहे, आणि अडई वर्तुळाचा ग मध्य आहे; तर फ आणि ग बिंदु सांधणारी रेघ वाढविली असतां, अ बिंदूतून जाईल.



कारण, जर ती अ बिंदूतून जात नसेल, तर तिची स्थिति फगडह आहे असें मान; आणि अफ, अग सांध.

2535०|

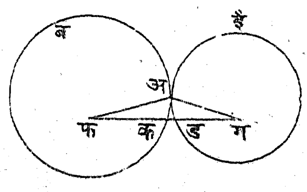
तेव्हां अग आणि गफ मिळून, अफ पेक्षां अधिक आहेत, (१.२०)
आणि अफ, हफ बराबर आहे, (१. व्याख्या १५)
म्हणून अग आणि गफ मिळून, हफ पेक्षां अधिक आहेत.
प्रत्येकांतून गफ साधारण भाग काढून टाक ;
म्हणून शेष अग, शेष गह पेक्षां अधिक आहे.
पण अग, डग बराबर आहे; (१. व्याख्या १५)
म्हणून डग, गह पेक्षां मोठी आहे, म्हणजे लहान रेघ मोठ्या रेघे पेक्षां अधिक आहे;
आणि हें होणें अशक्य आहे.
म्हणून फ आणि ग सांधणारी रेघ वाढविली असतां, अ बिंदू शिवाय दुसऱ्या कोणत्याही बिंदूंतून जात नाहीं;
म्हणजे ती अ बिंदूंतूनच जाते.

ह्याकरितां दोन वर्तुळें एकमेकास इत्यादि.

सिद्धांत १२. प्रमेय.

जर दोन वर्तुळें एकमेकास बाहेरल्या अंगानें स्पर्श करितात तर त्यांचे मध्य सांधणारी रेघ स्पर्श बिंदूंतून जाते.

अबक आणि अडई हीं दोन वर्तुळें एकमेकास अ बिंदूशीं बाहेरून स्पर्श करितात; आणि अबक वर्तुळाचा फ मध्य आहे, आणि अडई वर्तुळाचा ग मध्य आहे; तर फ आणि ग सांधणारी रेघ अ बिंदूंतून जाईल.



कारण, जर ती अ बिंदूंतून जात नसेल, तर तिची स्थिति फकडग आहे असें मान, आणि फअ, अग सांध.

तेव्हां अबक वर्तुळाचा फ मध्य आहे,
ह्यास्तव फअ, फक बराबर आहे; (१. व्याख्या १५)
आणि अडई वर्तुळाचा ग मध्य आहे, ह्यास्तव गअ, गड बराबर आहे;
म्हणून फअ, अग मिळून, फक व डग ह्यां बराबर आहेत. (प्र. प्र. २)

ह्यास्तव सर्व फग रेघ, फअ आणि अग ह्यापेक्षां मोठी आहे.
पण फग रेघ, फअ आणि अग ह्याहून लहानही आहे; (१.२०)
आणि हें होणें अशक्य आहे.
म्हणून फ आणि ग सांधणारी रेघ अ बिंदू शिवाय दुसऱ्या बिंदूंतून जात नाहीं, म्हणजे ती अ बिंदूंतूनच जाते.

ह्याकरितां, जर दोन वर्तुळें एकमेकास इत्यादि.

सिद्धांत १३. प्रमेय.

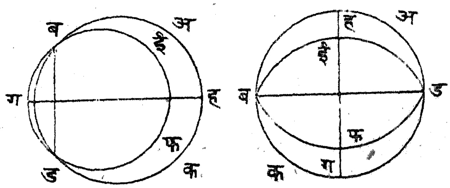
एक वर्तुळाचा स्पर्श दुसऱ्या वर्तुळास आंतून होवो किंवा बाहेरून होवो, तरी तो स्पर्श एका पेक्षां अधिक बिंदूशीं होत नाहीं.

कारण, जर एक वर्तुळाचा स्पर्श दुसऱ्या वर्तुळास एका पेक्षां अधिक बिंदूशीं होणें शक्य असेल, तर ईबफ वर्तुळाचा स्पर्श अबक वर्तुळास एकापेक्षां अधिक बिंदूशीं, आणि प्रथम आंतल्या बाजूनें ब आणि ड बिंदूशीं होतो असें समज.

बड सांध,

आणि बड स दुभागणारी व तीवर लंब अशी गह रेघ काढ. (१.१०,११)

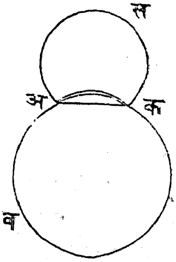
तेव्हां ब आणि ड बिंदु प्रत्येक वर्तुळाच्या परिघांत आहेत, ह्यास्तव बड रेघ प्रत्येक वर्तुळांत पडते. (३.२)



म्हणून बड स दुभागणारी आणि तीवर लंब अशा गह रेघेंत प्रत्येक वर्तुळाचा मध्य आहे; (३.१,कु.)
ह्यास्तव गह रेघ स्पर्शबिंदूंतून जाते. (३.११)
परंतु गह स्पर्शबिंदूंतून जात नाहीं ;
कारण, ब आणि ड स्पर्शबिंदु गह रेघेबाहेर आहेत;

आणि असें होणें अशक्य आहे.
म्हणून एक वर्तुळाचा स्पर्श दुसऱ्या वर्तुळास आंतल्या बाजूनें एकापेक्षां अधिक बिंदूंशीं होत नाहीं.

आणि बाहेरूनही एक वर्तुळाचा स्पर्श दुसऱ्या वर्तुळास एका पेक्षां अधिक बिंदूंशीं होत नाहीं.



कारण, जर एकापेक्षां अधिक बिंदूंशीं स्पर्श होणें शक्य असेल, तर **अकस** वर्तुळाचा स्पर्श **अबक** वर्तुळास बाहेरून **अ** आणि **क** बिंदूंशीं होतो असें मान; आणि **अक** सांध.

तेव्हां **अ** आणि **क** बिंदु **अकस** वर्तुळाच्या परिघांत आहेत, ह्यास्तव त्यांस सांधणारी **अक** रेघ **अकस** वर्तुळांत पडते; (३.२)
आणि **अकस** वर्तुळ **अबक** वर्तुळाबाहेर आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून **अक** रेघ **अबक** वर्तुळा बाहेर आहे.
परंतु **अ** आणि **क** बिंदु **अबक** वर्तुळाच्या परिघांत आहेत, ह्यास्तव **अक** रेघ **अबक** वर्तुळांत पडते; (३.२)
आणि हें होणें अशक्य आहे.
म्हणून एक वर्तुळाचा स्पर्श दुसऱ्या वर्तुळास बाहेरून एकापेक्षां अधिक बिंदूंशीं होत नाहीं.

आणि एक वर्तुळाचा स्पर्श आंतून दुसऱ्या वर्तुळास एकापेक्षां अधिक बिंदूंशीं होत नाहीं असें पूर्वीं दाखविलें आहे.

ह्याकरितां, एक वर्तुळाचा इत्यादि.

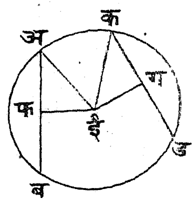
सिद्धांत १४. प्रमेय.

वर्तुळांत समान रेघा मध्यापासून समदूर असतात; आणि मध्यापासून समदूर रेघा समान असतात.

(१) **अबडक** वर्तुळांत **अब** आणि **कड** रेघा परस्पर बराबर आहेत; तर त्या, मध्यापासून समदूर होतील.

(३.१)

अबडक वर्तुळाचा ई मध्य काढ;
आणि ई पासून अब वर ईफ, आणि कड
वर ईग लंब काढ; (१.१२)
आणि ईअ, ईक सांध.



तेव्हां मध्यांतून जाणारी ईफ रेघ मध्यांतून न जाणाऱ्या अब रेघेवर लंब आहे;
म्हणून ती अब चे दोन समान भाग करिते; (३.३)

ह्यास्तव अफ, फब बराबर आहे, आणि अब; अफ ची दुपट आहे.
आणि असेंच, कड, कग ची दुपट आहे.
पण अब, कड बराबर आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून अफ, कग बराबर आहे, (प्र. प्र. ७)
आणि अई, कई बराबर आहे, (१. व्याख्या १५)
म्हणून अई वरील चौरस कई वरील चौरसा बराबर आहे.
परंतु अफ आणि फई ह्यांवरील चौरस मिळून, अई वरील चौरसा बराबर आहेत, कारण, अफई कोन काटकोन आहे; (१.४७)
आणि असेंच, कग आणि गई ह्यांवरील चौरस मिळून कई वरील चौरसा बराबर आहेत.
म्हणून अफ आणि फई ह्यांवरील चौरस मिळून, कग आणि गई ह्यांवरील चौरसां बराबर आहेत; (प्र. प्र. १)
परंतु अफ वरील चौरस कग वरील चौरसा बराबर आहे, कारण अफ, कग बराबर आहे;
म्हणून शेष फई वरील चौरस, शेष गई वरील चौरसा बराबर आहे. (प्र. प्र. ३)

म्हणून ईफ रेघ ईग रेघे बराबर आहे.
म्हणून अब, कड रेघा, मध्यापासून समदूर आहेत. (३. व्याख्या ४)

(२) तर अब, कड ह्या रेघा मध्यापासून समदूर आहेत, म्हणजे ईफ, ईग बराबर आहे; तर अब, कड बराबर होईल.

कारण, पूर्वीप्रमाणेंच आकृति करून, अब, अफची दुपट आहे, आणि कड, कग ची दुपट आहे, आणि ईफ आणि फअ ह्यांवरील

चौरस मिळून, ईग आणि गक ह्यांवरील चौरसां बरोबर आहेत, हें सर्व पूर्वी प्रमाणेंच दाखवितां येईल.

परंतु ईफ वरील चौरस, ईग वरील चौरसा बरोबर आहे,

कारण, ईफ, ईग बरोबर आहे; (प्रतिज्ञा)

म्हणून शेष फअ वरील चौरस, शेष गक वरील चौरसा बराबर आहे; (प्र. प्र. ३)

म्हणून अफ रेघ कग रेघेबरोबर आहे.

पण अब, अफ ची दुपट आहे, आणि कड, कग ची दुपट आहे असें वर दाखविलें आहे.

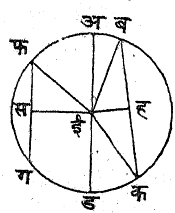
म्हणून अब, कड बरोबर आहे. (प्र. प्र. ६)

ह्याकरितां, वर्तुळांत समान रेघा इत्यादि.

सिद्धांत १५. प्रमेय.

वर्तुळांत सर्व रेघांमध्यें व्यास मोठा असतो, आणि दुसऱ्या रेघांत मध्या जवळची रेघ, मध्यापासून दूरच्या रेघेपेक्षां मोठी असते; आणि मोठी रेघ लहान रेघेपेक्षां मध्याजवळ असते.

अबकड एक वर्तुळ आहे, अड त्याचा व्यास आहे, आणि ई मध्य आहे; आणि बक रेघ फग रेघेपेक्षां मध्याजवळ आहे; तर अड रेघ कोणत्याही एका बक रेघेपेक्षां मोठी होईल, आणि बक रेघ फग रेघेपेक्षां मोठी होईल.



ई मध्यापासून बक आणि फग रेघांवर ईह आणि ईस लंब काढ, (१.१२)
आणि ईब, ईक, ईफ सांध.

तेव्हां अई, बई बराबर, आणि ईड, ईक बराबर आहे, (१व्या. १५)

म्हणून अड, बई आणि ईक ह्यां बराबर आहे; (प्र. प्र. २)

पण बई आणि ईक मिळून, बक पेक्षां अधिक आहेत; (१.२०)

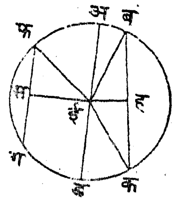
म्हणून अड, बक पेक्षां मोठी आहे.

आणि बक, फग पेक्षां मध्याजवळ आहे, (प्रतिज्ञा)

म्हणून ईह, ईस पेक्षां लहान आहे. (३. व्याख्या ५)

आतां बक, बह ची दुपट आहे, आणि फग, फस ची दुपट आहे, आणि

ईह व हब ह्यां वरील चौरस मिळून, ईस व सफ ह्यां वरील चौरसांबराबर आहेत, हें सर्व मागील सिद्धांतांत दाखविलें आहे;
परंतु ईह वरील चौरस, ईस वरील चौरसापेक्षां लहान आहे,
कारण ईह, ईस पेक्षां लहान आहे;



म्हणून हब वरील चौरस सफ वरील चौरसापेक्षां मोठा आहे;
ह्याकरितां बह रेघ फस रेघेपेक्षां मोठी आहे;
म्हणून बक, फग पेक्षां मोठी आहे.

पुनः, जर बक, फग पेक्षां मोठी आहे; तर बक, फगपेक्षां मध्याजवळ होईल, म्हणजे ईह, ईस पेक्षां लहान होईल.

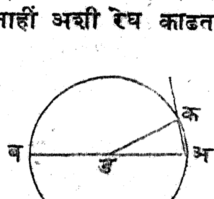
कारण बक, फग पेक्षां मोठी आहे, म्हणून बह, फस पेक्षां मोठी आहे.
परंतु बह आणि हई ह्यांवरील चौरस मिळून, फस आणि सई ह्यांवरील चौरसां बराबर आहेत.
आणि बह वरील चौरस, फस वरील चौरसापेक्षां मोठा आहे;
कारण बह, फस पेक्षां मोठी आहे;
म्हणून हई वरील चौरस, सई वरील चौरसाहून लहान आहे;
ह्याकरितां ईह रेघ ईस रेघेपेक्षां लहान आहे.

ह्याकरितां, वर्तुळांत सर्व रेघांमध्यें इत्यादि.

सिद्धांत १६. प्रमेय.

वर्तुळाचे व्यासावर त्याचे टोंकांतून काढलेला लंब वर्तुळाबाहेर पडतो; आणि तो लंब व वर्तुळाचा परिघ ह्यांच्या मध्यें व्यासाच्या त्याच टोंकापासून, वर्तुळास कापीत नाहीं अशी रेघ काढतां येत नाहीं.

(१) अबक एक वर्तुळ आहे, व ड त्याचा मध्य आणि अब त्याचा व्यास आहे; तर अब व्यासावर अ टोंका पासून काढलेला लंब वर्तुळाबाहेर पडेल.



कारण, जर तो लंब बाहेर पडत नाहीं, तर त्याची स्थिति अक आहे असें मान.

अक रेघ वर्तुळास ज्या दुसऱ्या क बिंदूंत मिळते, तो व ड बिंदु सांध.
तेव्हां डअ, डक बरोबर आहे. (१. व्याख्या १५)
म्हणून डअक कोन, डकअ कोना बरोबर आहे. (१.५)
परंतु डअक कोन काटकोन आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून डकअ कोनही काटकोन आहे;
ह्यास्तव डअक आणि डकअ कोन मिळून, दोन काटकोनां बरोबर आहेत; पण हें होणें अशक्य आहे. (१. १७)
म्हणून अ पासून अब वर काढलेला लंब वर्तुळांत पडत नाहीं.

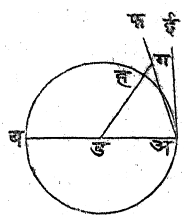
आणि ह्या रीतीनेंच असें दाखवितां येईल कीं तो लंब परिघावरही पडत नाहीं.

म्हणून तो वर्तुळाबाहेर पडून त्याची स्थिति अई आहे.

(२) अई रेघ आणि वर्तुळाचा परिघ ह्यांच्या मध्यें अ टोंकापासून वर्तुळास छेदीत नाहीं अशी रेघ काढतां येत नाहीं.

कारण, काढतां येत असल्यास, ती अफ आहे असें मान; आणि ड मध्यापासून अफ वर डग लंब काढ; (१. १२)
आणि डग रेघ परिघास ह बिंदूंत मिळते असें मान.
तेव्हां डगअ कोन काटकोन आहे, (रचना)
ह्यास्तव डअग कोन, काटकोनापेक्षां लहान आहे; (१.१७)

म्हणून डअ, डग पेक्षां मोठी आहे, (१.१९)
पण डअ, डह बरोबर आहे; (१. व्या. १५)
म्हणून डह, डगपेक्षां मोठी आहे, म्हणजे लहान रेघ मोठ्या रेघेपेक्षां मोठी आहे; व हें होणें अशक्य आहे.



ह्यास्तव अई लंब आणि परिघ ह्यांच्या मध्यें अ बिंदूंतून वर्तुळास छेदीत नाहीं अशी रेघ काढतां येत नाहीं.

ह्याकरितां, वर्तुळाचे व्यासावर इत्यादि.

कुरलरी. वरील सिद्धांतावरून असें उघड होतें कीं वर्तुळाच्या व्यासाच्या टोंकापासून त्यावर लंब काढला, तर तो त्या वर्तुळास स्पर्श करितो; (३.व्याख्या२)

आणि तो लंब त्या वर्तुळास एकच बिंदूशीं स्पर्श करितो,
कारण, जर तो त्या वर्तुळास दोन बिंदूशीं मिळाला, तर तो वर्तुळांत पडेल. (३.२)

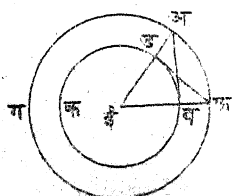
आणखी हेंही उघड आहे कीं वर्तुळास एकच बिंदूशीं स्पर्श करणारी रेघ एकच असते.

सिद्धांत १७. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुळा बाहेरील किंवा वर्तुळाच्या परिघावरील दिलेल्या बिंदूपासून वर्तुळास स्पर्श रेघ काढावयाचें.

प्रथमतः अ दिलेला बिंदु बकड दिलेल्या वर्तुळा बाहेर आहे; तर त्या बिंदूपासून वर्तुळास स्पर्शरेघ काढावयाची आहे.

वर्तुळाचा ई मध्य काढ, (३.१)
आणि अई सांध, आणि ती वर्तुळास ड बिंदूंत छेदिते;
आणि ई मध्यापासून ईअ अंतरानें अफग वर्तुळ काढ; (गृ. गो. ३)
ड पासून ईअ वर डफ लंब काढ, (१.११)
आणि ईफ सांध, आणि ती दिलेल्या वर्तुळास ब मध्यें छेदिते;
अब सांध. अब रेघ बकड वर्तुळास स्पर्शरेघ होईल.



कारण, अफग वर्तुळाचा ई मध्य आहे, म्हणून ईअ, ईफ बराबर आहे;
आणि बकड वर्तुळाचाही ई मध्य आहे,
म्हणून ईब, ईड बराबर आहे.
(१. व्याख्या १५)

म्हणून अई, ईब ह्या दोन बाजू प्रत्येकीं फई, ईड ह्या दोन बाजू बराबर आहेत,
आणि ई कोन अईब, फईड ह्या दोन त्रिकोणांस साधारण आहे;
म्हणून अबई कोन, फडई कोना बराबर आहे. (१.४)
परंतु फडई कोन काटकोन आहे; (रचना)
म्हणून अबई कोन काटकोन आहे, (प्र. प्र. १)
म्हणजे अब, ईब वर लंब आहे.

आणि ईब, मध्यांतून काढली आहे,
ह्याकरितां अब, वर्तुळास स्पर्शरेघ आहे. (३.१६, कुरलरी)
आणि अब, अ पासून काढली आहे.

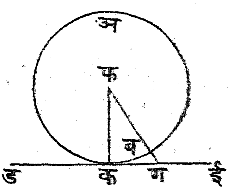
ह्याकरितां, **दिलेल्या अ बिंदूपासून बकड दिलेल्या वर्तुळास अब स्पर्शरेघ काढली आहे.**

परंतु दिलेला बिंदु वर्तुळाच्या परिघावर असला म्हणजे तो ड असला, तर ई मध्यापर्यंत डई काढ, आणि डई वर ड पासून डफ लंब काढ: म्हणजे डफ, वर्तुळास स्पर्शरेघ होते. (३.१६, कुरलरी)

सिद्धांत १८. प्रमेय.

जर एक रेघ वर्तुळास स्पर्श करिते, तर स्पर्श बिंदूपासून वर्तुलमध्यापर्यंत काढलेली रेघ त्या स्पर्शरेघेवर लंब होते.

डई रेघ **अबक** वर्तुळास क बिंदूशीं स्पर्श करिते; **अबक** वर्तुळाचा फ मध्य काढ; आणि **फक** सांध; तर **फक**, डई वर लंब होईल.



कारण, जर डई वर **फक** लंब नसेल, तर फ पासून डई वर **फग** लंब काढ; **फग**, वर्तुलपरिघास ब मध्यें मिळते.

तेव्हां **फगक** काटकोन आहे, (प्रतिज्ञा)
म्हणून **फकग** लघुकोन आहे; (१.१७)
म्हणून **फकग** त्रिकोणांत **फक**, **फग** पेक्षां मोठी आहे. (१.१९)
परंतु **फक**, **फब** बराबर आहे; (१.व्याख्या १५)
म्हणून फब, फग हून मोठी आहे, म्हणजे लहान बाजू मोठीहून मोठी आहे;
परंतु ही गोष्ट असंभाव्य आहे.
म्हणून **फग**, डई वर लंब नाहीं.

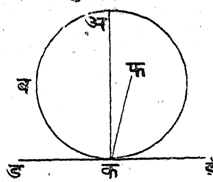
ह्याप्रमाणें असें दाखवितां येईल कीं फ पासून डई वर **फक** खेरीज, दुसरी कोणतीही रेघ लंब नाहीं;
म्हणून **फक**, डई वर लंब आहे.

ह्याकरितां, **जर एक रेघ वर्तुळास स्पर्श करिते**, इत्यादि.

सिद्धांत १९. प्रमेय.

जर एक रेघ वर्तुळास स्पर्श करिते, तर स्पर्शबिंदूंतून त्या स्पर्शरेघेवर काढलेल्या लंबरेघेंत वर्तुळाचा मध्य असतो.

अबक वर्तुळास **डई** रेघ **क** बिंदूशीं स्पर्श करिते, आणि **क** बिंदूंतून **डई** रेघेवर **कअ** लंब काढला आहे; तर वर्तुळाचा मध्य **कअ** रेघेंत येईल.



कारण, जर वर्तुळाचा मध्य **कअ** रेघेमध्यें नसेल, तर तो **फ** आहे असें मान, आणि **फक** सांध.
तेव्हां **अबक** वर्तुळास **डई** स्पर्श करिते, आणि **फक** रेघ मध्यापासून स्पर्शबिंदूपर्यंत काढली आहे, म्हणून **फक** रेघ **डई** रेघे वर लंब आहे. (३.१८)

म्हणून **फकई** कोन काटकोन आहे.

परंतु **अकई** कोनही काटकोन आहे; (रचना)

ह्यास्तव **फकई** कोन **अकई** कोना बराबर आहे; (प्र. प्र.११)

म्हणजे लहान कोन मोठ्या कोना बराबर आहे; पण हें होणें अशक्य आहे.

म्हणून **फ** बिंदु **अबक** वर्तुळाचा मध्य नाहीं.

ह्याप्रमाणेंच, **कअ** रेघेबाहेर दुसरा कोणताही बिंदु मध्य नाहीं, असें दाखवितां येईल; म्हणून मध्य **कअ** रेघेंत आहे.

ह्याकरितां, जर एक रेघ वर्तुळास स्पर्श करिते, इत्यादि.

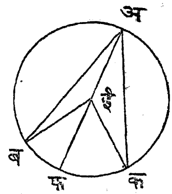
सिद्धांत २०. प्रमेय.

वर्तुळांतील मध्य कोन, तो ज्या कौंसावर असतो, त्याच कौंसावरील परिघकोनाची दुपट असतो.

अबक वर्तुळ आहे, आणि **ई** त्याचा मध्य आहे, आणि **ई** मध्याशीं होणाऱ्या **बईक** कोनास मध्यकोन म्हणतात; आणि त्याचा पाया **बक** कौंस आहे; आणि **बक** कौंसावर परिघांतील कोणत्याही **अ** बिंदूशीं

अई सांध, आणि तो फ बिंदूपर्यंत वाढव.

(१) वर्तुळाचा मध्य **बअक** कोनांत आहे, तेव्हां **ईअ**, **ईब** बराबर आहे, म्हणून **ईअब** कोन **ईबअ** कोना बराबर आहे; (१.५)



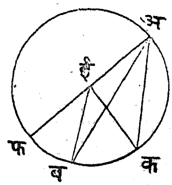
ह्यास्तव **ईअब** आणि **ईबअ** हे दोन कोन मिळून, **ईअब** कोनाची दुपट आहेत. परंतु **बईफ** कोन, **ईअब** आणि **ईबअ** ह्या दोन कोनां बराबर आहे. (१.३२)

म्हणून **बईफ** कोन **ईअब** कोनाची दुपट आहे.

ह्याच कारणास्तव **फईक** कोन **ईअक** कोनाची दुपट आहे.

म्हणून सगळा **बईक** कोन सगळ्या **बअक** कोनाची दुपट आहे.

(२) जेव्हां वर्तुळाचा **ई** मध्य **बअक** कोनाबाहेर आहे, तेव्हां वरील प्रमाणेंच **फईक** कोन **फअक** कोनाची दुपट आहे, आणि **फईब** कोन **फअब** कोनाची दुपट आहे असें दाखवितां येईल.



म्हणून शेष **बईक** कोन, शेष **बअक** कोनाची दुपट आहे;

ह्याकरितां, **वर्तुळांतील मध्य कोन** इत्यादि.

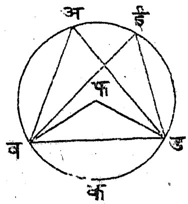
सिद्धांत २१. प्रमेय.

वर्तुळाच्या एकच खंडांत असणारे कोन परस्पर बराबर असतात.

अबकड एक वर्तुळ आहे, आणि **बअड** व **बईड** हे दोन कोन एकच **बअईड** वर्तुळखंडांत आहेत; तर **बअड** आणि **बईड** हे दोन कोन परस्पर बराबर होतील.

अबकड वर्तुळाचा **फ** मध्य काढ. (३.१)

(१) **बअईड** खंड अर्धवर्तुळापेक्षां मोठें आहे,



तेव्हां बफ आणि डफ सांध.

आतां, बफड कोन मध्यकोन आहे आणि बअड कोन परिघकोन आहे आणि ते एकच बकड कौंसावर आहेत;

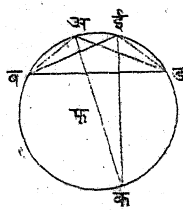
म्हणून बफड कोन बअड कोनाची दुपट आहे. (३.२०)

ह्याच कारणास्तव बफड कोन बईड कोनाची दुपट आहे.

म्हणून बअड कोन बईड कोना बराबर आहे. (प्र. प्र. ७)

(२) बअईड खंड अर्धवर्तुळा पेक्षां मोठें नाहीं,

तेव्हां अफ सांध, आणि ती परिघास क बिंदूंत मिळे पर्यंत वाढीव, आणि कई सांध.



आतां, बअईक खंड अर्धवर्तुळा पेक्षां मोठें आहे,

म्हणून त्यांतील बअक आणि बईक कोन मागील प्रकाराप्रमाणें परस्पर बराबर आहेत.

आणि असेंच, कअईड खंड अर्धवर्तुळा पेक्षां मोठें आहे, म्हणून कअड कोन कईड कोना बराबर आहे.

ह्याकरितां सगळा बअड कोन सगळ्या बईड कोना बराबर आहे. (प्र. प्र. २)

ह्याकरितां, वर्तुळाच्या एकच खंडांत इत्यादि.

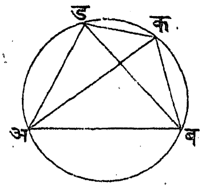
सिद्धांत २२. प्रमेय.

वर्तुळांत काढलेल्या चौकोनाचे समोरासमोरचे कोन मिळून, दोन काटकोनां बराबर असतात.

अबकड चौकोन अबकड वर्तुळांत काढला आहे; तर त्याचे समोरासमोरचे दोन कोन मिळून, दोन काटकोनां बराबर होतील.

अक आणि बड सांध.

तेव्हां कअब त्रिकोणाचे कअब, अकब, आणि अबक हे तीन कोन मिळून, दोन काटकोनां बराबर आहेत. (१.३२)



परंतु कअब कोन कडब कोना बराबर आहे, कारण ते एकच कडअब खंडांत आहेत; (३.२१)

आणि अकब कोन अडब कोना बराबर आहे, कारण, तेही एकच अडकब खंडांत आहेत; (३.२१)

म्हणून कअब आणि अकब हे दोन कोन मिळून, सगळ्या अडक कोना बराबर आहेत. (प्र. प्र. २)

ह्या बरोबरीच्या प्रत्येकास अबक कोन मिळीव;

म्हणून कअब, अकब, आणि अबक हे तीन कोन मिळून, अबक आणि अडक ह्या दोन कोनां बराबर आहेत.

परंतु कअब, अकब आणि अबक हे तीन कोन मिळून, दोन काटकोनां बराबर आहेत, असें वर दाखविलें आहे.

म्हणून अबक आणि अडक हे कोन मिळून, दोन काटकोनां बराबर आहेत. (प्र. प्र. १)

ह्याप्रमाणेंच बअड आणि बकड हे दोन कोन मिळून, दोन काटकोनां बराबर आहेत असें दाखवितां येईल.

ह्याकरितां, वर्तुळांत काढलेल्या चौकोनाचे इत्यादि.

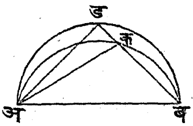
सिद्धांत २३. प्रमेय.

एकाच रेषेवर आणि तिचे एकाच अंगास दोन सरूप वर्तुलखंडें एकमेकाशीं न मिळतां राहत नाहींत.

ही गोष्ट शक्य असेल, तर अब रेषेवर आणि तिच्या एकाच अंगास अकब, अडब हीं दोन सरूप वर्तुलखंडें एक दुसऱ्याशीं न मिळतां आहेत असें समज.

तेव्हां अबक वर्तुल अडब वर्तुलास अ, ब ह्या दोन बिंदूंत कापतें, म्हणून तीं एकमेकास कोणत्याही तिसऱ्या बिंदूंत कापीत नाहींत, (३.१०)

म्हणून दोहों वर्तुलखंडां पैकीं एक दुसऱ्यामध्यें पडलें पाहिजे; अकब खंड अडब खंडांत पडतें असें मान; बकड रेघ काढ, आणि अक, अड सांध.

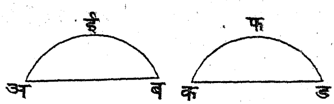


आतां, अकब, अडब हीं सरूप वर्तुलखंडें आहेत, (प्रतिज्ञा)
म्हणून अकब कोन अडब कोना बरावर आहे, (३. व्याख्या ११)
म्हणजे अकड त्रिकोणाचा बाहेरील कोन आंतिला समोरील कोना बरावर आहे;
परंतु ही गोष्ट अशक्य आहे. (१.१६)
ह्याकरितां, एकाच रेघेवर इत्यादि.

सिद्धांत २४. प्रमेय.

समान रेघांवरील सरूप वर्तुलखंडें परस्पर बरावर असतात.

अब, कड समान रेघांवर अईब, कफड सरूप वर्तुलखंडें आहेत; तर अईब वर्तुलखंड कफड वर्तुलखंडा बरावर होईल.

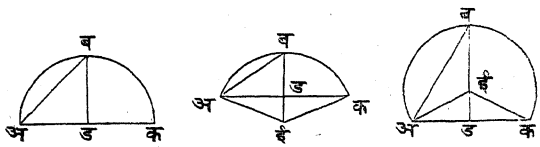


कारण, जर अईब वर्तुलखंड कफड वर्तुलखंडावर असें ठेविलें, कीं अ बिंदु क बिंदूवर पडेल, आणि अब रेघ कड रेघेवर पडेल, तर ब बिंदु ड बिंदूवरच पडेल, कारण अब, कड बरावर आहे. (प्रतिज्ञा)
म्हणून अब रेघ कड रेघेशीं मिळाली असतां, अईब वर्तुलखंड कफड वर्तुलखंडाशीं मिळालें पाहिजे. कारण तीं सरूप आहेत; (३.२३)
म्हणून अईब वर्तुलखंड कफड वर्तुलखंडा बरावर आहे.
ह्याकरितां, समान रेघांवरील इत्यादि.

सिद्धांत २५. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुलखंडावरून, तें ज्या वर्तुलाचें खंड आहे तें वर्तुल काढावयाचें.

अबक दिलेलें एक वर्तुलखंड आहे; तर तें ज्या वर्तुलाचें खंड आहे तें वर्तुल काढावयाचें आहे.



अक, ड बिंदूंत दुभाग; (१.१०)
ड बिंदूंतून डब, अक वर लंब काढ; (१.११)
आणि अब सांध.

(१) जेव्हां अबड कोन बअड कोना बराबर आहे,
तेव्हां अड, बड बराबर आहे. (१. ६)
परंतु डअ, डक बराबर आहे; (रचना)
म्हणून डब, डक बराबर आहे. (प्र. प्र. १)
म्हणून डअ, डब, डक ह्या तीन रेघा परस्पर बराबर आहेत,
ह्यास्तव ड, वर्तुलाचा मध्य आहे. (३. ९)

ड मध्यापासून डअ, डब, डक ह्या तीन रेघांतून कोणतेही रेघे इतक्या अंतरानें वर्तुल काढ; म्हणजे तें दुसऱ्या बिंदूंतून जाईल, आणि ह्या वर्तुलाचें अबक खंड आहे तें निघेल.

आणि अक मध्यें ड मध्य आहे, म्हणून अबक वर्तुलखंड अर्धवर्तुल आहे.

(२) जेव्हां अबड कोन बअड कोना बराबर नाहीं,
तेव्हां अब रेघेंत अ बिंदूशीं बअई कोन अबड कोना बराबर कर; (१.२३)
गरज पडल्यास बड, अई स ई बिंदूंत मिळे पर्यंत वाढीव, आणि ईक सांध.

तेव्हां बअई कोन अबई कोना बराबर आहे, (रचना)
म्हणून ईअ, ईब बराबर आहे. (१.६)
आणि अड, डक बराबर आहे, (रचना)
आणि डई, अडई आणि कडई ह्या दोन त्रिकोणास साधारण आहे;
म्हणून अड, डई ह्या दोन बाजू प्रत्येकीं कड, डई ह्या दोन बाजू बराबर आहेत;
आणि अडई कोन कडई कोना बराबर आहे, कारण त्यांतील प्रत्येक कोन काटकोन आहे; (रचना)

परंतु ईअ, ईब बरोबर आहे असें सिद्ध केलें आहे;

म्हणून ईब, ईक बरोबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्यास्तव ईअ, ईब, ईक ह्या तीनही रेषा परस्पर बराबर आहेत; (३.९)

म्हणून ई, वर्तुळाचा मध्य आहे.

ई मध्यापासून ईअ, ईब, ईक ह्या तीन रेषांतून कोणत्याही एका रेषे इतक्या अंतरानें वर्तुळ काढ; म्हणजे तें दुसऱ्या बिंदूंतून जाईल, आणि ज्या वर्तुळाचें **अबक** खंड आहे तें निघेल.

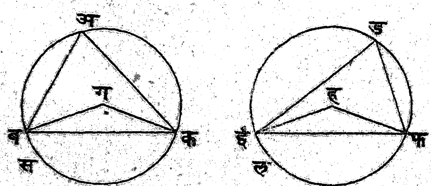
आणि हें उघड आहे, कीं **अबड** कोन **बअड** कोनाहून मोठा असतो, तेव्हां **ई** मध्य **अबक** वर्तुलखंडा बाहेर पडतो, आणि अर्थातच तें खंड अर्धवर्तुळा पेक्षां कमी असतें; परंतु जेव्हां **अबड** कोन **बअड** कोनाहून कमी असतो, तेव्हां **ई** मध्य **अबक** वर्तुलखंडांत पडतो, आणि अर्थातच तें खंड अर्धवर्तुलाहून अधिक असतें.

ह्याकरितां, दिलेल्या वर्तुलखंडापासून, तें ज्या वर्तुलाचें खंड आहे तें काढलें आहे.

सिद्धांत २६. प्रमेय.

समानवर्तुळांत समानमध्यकोन आणि समानपरिघकोन समान-कौंसावर असतात.

अबक आणि **डईफ** समान वर्तुळें आहेत; आणि त्यांत **बगक** आणि **ईहफ** हे समान मध्यकोन आहेत, आणि **बअक** आणि **ईडफ** हे समान परिघकोन आहेत; तर **बसक** कौंस **ईलफ** कौंसा बराबर होईल.



बक आणि **ईफ** सांध.

तेव्हां **अबक** आणि **डईफ** समान वर्तुळें आहेत, (प्रतिज्ञा)
ह्यास्तव त्यांच्या मध्यापासून परिघापर्यंत काढलेल्या रेषा परस्पर बराबर आहेत, (३. व्याख्या १)
म्हणून **बग**, **गक** बाजू, **ईह**, **हफ** बाजूंशीं प्रत्येकीं बराबर आहेत;
आणि **ग** मध्यकोन **ह** मध्यकोना बराबर आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून **बक** पाया **ईफ** पाया बराबर आहे. (१.४)
आणि **अ** कोन **ड** कोना बराबर आहे, (प्रतिज्ञा)
ह्यास्तव **बअक** आणि **ईडफ** हीं खंडें सरूप आहेत; (३. व्याख्या ११)
आणि तीं **बक** आणि **ईफ** समान रेषांवर आहेत;
ह्यास्तव **बअक** खंड, **ईडफ** खंडा बराबर आहे. (३.२४)

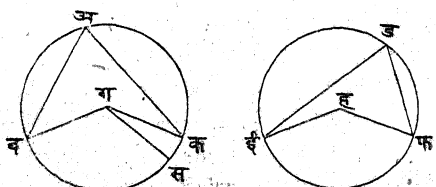
परंतु सगळें **अबक** वर्तुळ सगळ्या **डईफ** वर्तुळा बराबर आहे, (प्रतिज्ञा)
म्हणून शेष **बसक** खंड, शेष **ईलफ** खंडा बराबर आहे. (प्र.प्र. ३)
म्हणून **बसक** कौंस **ईलफ** कौंसा बराबर आहे.

ह्याकरितां, समान वर्तुळांत इत्यादि.

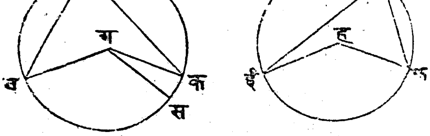
सिद्धांत २७. प्रमेय.

समानवर्तुळांत, समानकौंसावरील मध्यकोन आणि परिघकोन परस्पर बराबर असतात.

अबक आणि **डईफ** समान वर्तुळें आहेत, आणि त्यांचे **बगक** आणि **ईहफ** मध्यकोन, आणि **बअक** आणि **ईडफ** परिघकोन, **बक** आणि **ईफ** समान कौंसांवर आहेत; तर **बगक** कोन **ईहफ** कोना बराबर होईल, आणि **बअक** कोन **ईडफ** कोना बराबर होईल.



कारण जर **बगक** कोन **ईहफ** कोना बराबर नाहीं, तर त्यांतून एक



मोठा आहे असें मान, आणि **बग** रेषेंत ग बिंदूशीं **बगस** कोन **ईहफ**
कोना बराबर कर. (१. २३)
तेव्हां **बगस** कोन **ईहफ** कोना बराबर आहे, आणि ते समान व-
र्तुळांतील मध्य कोन आहेत.
म्हणून **बस** कौंस **ईफ** कौंसा बराबर आहे. (३.२६)
परंतु **ईफ** कौंस **बक** कौंसा बराबर आहे. (प्रतिज्ञा)
म्हणून **बस** कौंस **बक** कौंसा बराबर आहे; (प्र.प्र.१)
म्हणजे लहान कौंस मोठ्या कौंसा बराबर आहे, पण हें होणें अशक्य आहे.
म्हणून **बगक** कोन **ईहफ** कोना बराबर नाहीं असें नाहीं,
म्हणजे ते परस्पर बराबर आहेत.

आणि **अ** परिघकोन **बगक** कोनाचें अर्धं आहे, आणि **ड** परिघ-
कोन **ईहफ** कोनाचें अर्धं आहे; (३.२०)
म्हणून **अ** परिघकोन **ड** परिघकोना बराबर आहे. (प्र.प्र. ७)

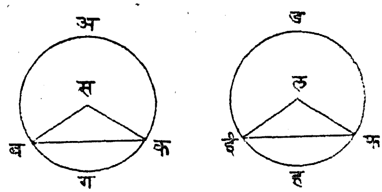
ह्याकरितां, **समान वर्तुळांत समान कौंसावरील** इत्यादि.

सिद्धांत २८. प्रमेय.

समान वर्तुळांत समान रेघा समान कौंस कापितात; म्हणजे त्यांनीं कापिलेल्या कौंसांपैकीं मोठे कौंस परस्पर बराबर असतात, आणि लहान कौंस परस्पर बराबर असतात.

अबक आणि **डईफ** समान वर्तुळें आहेत, आणि त्यांत **बक** आणि **ईफ** समान रेघा आहेत; तर त्यांनीं कापिलेले मोठे कौंस **बअक** आणि **ईडफ** परस्पर बराबर, आणि लहान कौंस **बगक** व **ईहफ** परस्पर बराबर होतील.

स आणि ल हे वर्तुळांचे मध्य काढ, (३.१)



आणि बस, सक, ईल, लफ सांध.

तेव्हां अबक वर्तुळ डईफ वर्तुळा बराबर आहे, (प्रतिज्ञा)
म्हणून बस, सक, ईल, लफ ह्या बाजू परस्पर बराबर आहेत.
(३. व्याख्या १)
म्हणून बस, सक ह्या प्रत्येकीं ईल, लफ ह्यां बराबर आहेत;
आणि बक पाया ईफ पाया बराबर आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून बसक कोन ईलफ कोना बराबर आहे. (१.८)
परंतु हे मध्यकोन आहेत,
ह्यास्तव बगक कौंस ईहफ कौंसा बराबर आहे. (३.२६)

परंतु अबगक परिघ डईहफ परिघाबराबर आहे; (प्रतिज्ञा)
म्हणून शेष बअक कौंस, शेष ईडफ कौंसा बराबर आहे. (प्र.प्र. ३)

ह्याकरितां, समान वर्तुळांत इत्यादि.

सिद्धांत २९. प्रमेय.

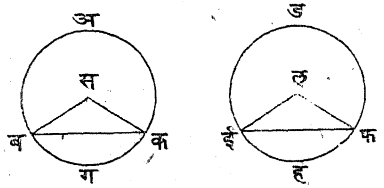
समान वर्तुळांत समान कौंसांचीं टोंकें सांधणाऱ्या रेघा समान असतात.

अबक आणि डईफ समान वर्तुळें आहेत; आणि त्यांचे बगक आणि ईहफ कौंस समान आहेत. बक आणि ईफ सांध; तर बक रेघ ईफ रेघे बराबर होईल.

वर्तुळांचे स आणि ल मध्य काढ, (३.१)
आणि बस, सक, ईल, लफ, सांध.

तेव्हां बगक कौंस ईहफ कौंसा बराबर आहे, (प्रतिज्ञा)

ह्यास्तव बसक मध्यकोन ईलफ मध्यकोनाबराबर आहे. (३. २७)



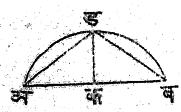
आणि अबक आणि ईडफ समान वर्तुळें आहेत, (प्रतिज्ञा)
ह्यास्तव त्यांच्या मध्यापासून परिघापर्यंत काढलेल्या रेघा परस्पर बराबर आहेत; (३. व्याख्या १)
म्हणून बस, सक ह्या दोन बाजू प्रत्येकीं ईल, लफ ह्या दोन बाजूं बराबर आहेत;
आणि त्यांच्या मधील कोन परस्पर बराबर आहेत;
म्हणून बक पाया ईफ पाया बराबर आहे. (१.४)
ह्याकरितां, समान वर्तुळांत इत्यादि.

सिद्धांत ३०. कृत्य.

दिलेला कौंस दुभागावयाचें, म्हणजे त्याचे दोन समान भाग करावयाचें.

अडब एक दिलेला कौंस आहे, व तो दुभागावयाचा आहे.

अब सांध;
आणि क बिंदूंत अब चे दोन समान भाग कर ; (१. १०)
आणि क बिंदूतून अब रेघेवर कड लंब काढ, (१.११)



आणि तो, कौंसास ड बिंदूंत मिळे पर्यंत वाढीव.
म्हणजे अडब कौंस ड बिंदूंत दुभागेल.

अड आणि डब सांध.
तेव्हां अक, कब बराबर आहे, (रचना)
आणि अकड आणि बकड त्रिकोणांस कड साधारण आहे ;
म्हणून अक, कड ह्या दोन बाजू प्रत्येकीं बक, कड ह्या दोन बाजूं बराबर आहेत ;

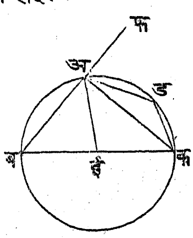
आणि अकड कोन बकड कोना बराबर आहे, कारण त्यांतील प्रत्येक कोन काटकोन आहे. (रचना)
म्हणून अड पाया बड पाया बराबर आहे. (१. ४)
परंतु अड, बड ह्या समान रेघा एकाच वर्तुळांतील आहेत.
म्हणून अड कौंस डब कौंसा बराबर आहे. (३. २८)

ह्याकरितां, दिलेला **अडब** कौंस **ड** बिंदूंत दुभागला आहे.

सिद्धांत ३१. प्रमेय.

वर्तुळामध्यें अर्धवर्तुळांतला कोन काटकोन असतो; आणि अर्ध वर्तुळापेक्षां मोठ्या खंडांतला कोन काटकोनाहून लहान असतो; आणि अर्ध वर्तुळापेक्षां लहान खंडांतला कोन काटकोनापेक्षां मोठा असतो.

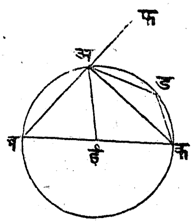
अबकड एक वर्तुळ आहे, आणि **बक** त्याचा व्यास आहे, आणि **ई** मध्य आहे. **कअ** रेघ काढून **अबकड** वर्तुळाचे **अबक** आणि **अडक** असे दोन खंड कर, आणि **बअ**, **अड**, **डक** सांध; तर **बअक** अर्धवर्तुळांतला कोन काटकोन होईल; परंतु अर्धवर्तुळापेक्षां मोठ्या **अबक** खंडांतला कोन काटकोनाहून कमी होईल; आणि अर्धवर्तुळापेक्षां लहान **अडक** खंडांतला कोन काटकोनापेक्षां मोठा होईल.



अई सांध, आणि **बअ** रेघ **फ** पर्यंत वाढीव.
तेव्हां **ईअ**, **ईब** बराबर आहे, (१. व्याख्या १५)
ह्यास्तव **ईअब** कोन, **ईबअ** कोनाबराबर आहे; (१. ५)
आणि **ईअ**, **ईक** बराबर आहे, (१. व्याख्या १५)
म्हणून **ईअक** कोन, **ईकअ** कोना बराबर आहे; (१. ५)
ह्यास्तव सगळा **बअक** कोन, **अबक** आणि **अकब** ह्या दोन कोनां बराबर आहे. (प्र. प्र. २)
परंतु **अबक** त्रिकोणाचा बाहेरील **फअक** कोन, **अबक** आणि **अकब** ह्या दोन कोनां बराबर आहे; (१. ३२)
म्हणून **बअक** कोन **फअक** कोना बराबर आहे. (प्र. प्र. १)

आणि ते जवळ जवळचे कोन आहेत,
म्हणून प्रत्येक काटकोन आहे; (१. व्याख्या १०)
म्हणजे बअक अर्धवर्तुळांतला कोन काटकोन आहे.

आणि अबक त्रिकोणाचे अबक आणि बअक हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांहून कमी आहेत, (१. १७)
आणि बअक काटकोन आहे, हें वर दाखविलें आहे,
म्हणून अबक कोन काटकोना पेक्षां कमी आहे,
म्हणजे अर्धवर्तुळापेक्षां मोठ्या अबक खंडांतला कोन काटकोनाहून कमी आहे.



आणि अबकड चौकोन वर्तुळांतला आहे,
म्हणून अबक आणि अडक हे त्याचे समोरासमोरचे दोन कोन मिळून, दोन काटकोनां बराबर आहेत. (३.२२)
परंतु अबक कोन काटकोनाहून कमी आहे हें वर दाखविलें आहे;
म्हणून अडक कोन काटकोनापेक्षां मोठा आहे;
म्हणजे अर्धवर्तुळापेक्षां अडक लहान खंडांतला कोन, काटकोना पेक्षां मोठा आहे.

ह्याकरितां, वर्तुळा मध्यें अर्धवर्तुळांतला इत्यादि.

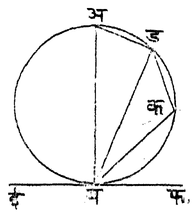
कुरलरी. वरील सिद्धते वरून हें उघड आहे, कीं जर त्रिकोणांत एक कोन दुसऱ्या दोन कोनां बराबर आहे, तर तो काटकोन असतो. कारण त्याजवळचा कोन त्याच दोन कोनां बराबर असतो, (१.३२) आणि जेव्हां जवळ जवळचे कोन बराबर आहेत तेव्हां त्यांतील प्रत्येक काटकोन असतो. (१. व्याख्या १०)

सिद्धांत ३२. प्रमेय.

जर एक रेघ वर्तुळास स्पर्श करिते, आणि स्पर्शबिंदूपासून वर्तुळास छेदणारी एक रेघ काढली, तर छेदनरेघ जे कोन स्पर्शरेघेशीं करिते ते, वर्तुळाच्या व्युत्क्रम खंडांतील कोनां बराबर असतात.

अबकड वर्तुळास ईफ रेघ ब बिंदूशीं स्पर्श करिते, आणि ब

बिंदूपासून वर्तुळास छेदणारी बड रेघ काढली आहे; तर जे कोन बड रेघ ईफ स्पर्श रेघेशीं करिते ते, वर्तुळाचे व्युत्क्रम खंडांतील कोन बराबर होतील; म्हणजे डबफ कोन बअड खंडांतील कोना बराबर होईल; आणि डबई कोन बकड खंडांतील कोना बराबर होईल.



ब बिंदूपासून इफ रेघेवर बअ लंब काढ; (१.११)
आणि बड कौंसांत क बिंदु घेऊन अड, डक, कब सांध.

तेव्हां ईफ रेघ अबकड वर्तुळास ब बिंदूशीं स्पर्श करिते, (प्रतिज्ञा)
आणि स्पर्शबिंदूंतून स्पर्श रेघेवर बअ लंब काढली आहे, (रचना)
म्हणून वर्तुळाचा मध्य बअ रेघेंत आहे. (३.१९)
ह्यास्तव अर्धवर्तुळांतला अडब कोन काटकोन आहे; (३.३१)
म्हणून बअड आणि अबड हे दोन कोन, एक काटकोना बराबर आहेत. (१.३२)
परंतु अबफ कोनही काटकोन आहे. (रचना)
म्हणून अबफ कोन, बअड आणि अबड ह्या दोन कोनां बराबर आहे.
ह्या बराबरीच्या प्रत्येकांतून अबड कोन काढून टाक,
म्हणून शेष डबफ कोन, शेष बअड कोना बराबर, म्हणजे व्युत्क्रम-खंडांतील कोना बराबर आहे; (प्र. प्र. ३)

पुनः, अबकड चौकोन वर्तुळांत आहे,
म्हणून बअड आणि बकड हे दोन समोरासमोरचे कोन, दोन काट-कोनां बराबर आहेत. (३.२२)
परंतु डबफ आणि डबई हे दोन कोन मिळून, दोन काटकोनां बराबर आहेत. (१.१३)
म्हणून डबफ आणि डबई हे दोन कोन मिळून, बअड आणि बकड ह्या दोन कोनां बराबर आहेत.
आणि डबफ कोन बअड कोना बराबर आहे, असें वर दाखविलें आहे;

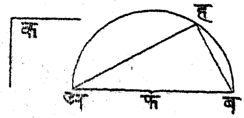
म्हणून शेष डबई कोन, शेष बकड कोना बराबर, म्हणजे व्युत्क्रम-खंडांतील कोना बराबर आहे. (प्र. प्र. २)

ह्याकरितां, जर एक रेघ वर्तुळास स्पर्श करिते इत्यादि.

सिद्धांत ३३. कृत्य.

दिलेल्या रेघेवर, ज्यांतील कोन दिलेल्या कोना बराबर होईल, असें एक वर्तुळखंड काढावयाचें.

अब दिलेली रेघ आहे, आणि क दिलेला कोन आहे; तर अब वर असें वर्तुळखंड काढावयाचें आहे कीं त्यांतील कोन क बराबर होईल.

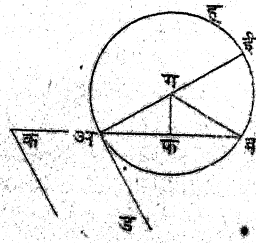


(१) जेव्हां क कोन काटकोन आहे, तेव्हां अब, फ मध्यें दुभाग; (१.१०)
आणि फ मध्यापासून फब अंतरानें अहब अर्धवर्तुळ काढ. (गृ.गो.३)

तेव्हां अर्धवर्तुळांतील अहब कोन, क काटकोना बराबर आहे. (३.३१)

(२) परंतु जेव्हां क कोन काटकोन नाहीं, तेव्हां अब रेघेंत अ बिंदूशीं बअड कोन क कोना बराबर कर; (१.२३)
अ बिंदूपासून अड वर अई लंब काढ; (१.११)

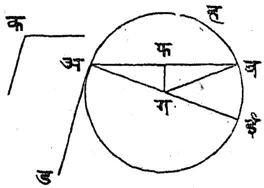
अब, फ मध्यें दुभाग; (१.१०)
फ बिंदूपासून अब वर फग लंब काढ; (१.११)
आणि गब सांध.



तेव्हां अफ, बफ बराबर आहे; (रचना)
आणि अफग, बफग ह्या दोन त्रिकोणांस फग साधारण आहे;
म्हणून अफ, फग ह्या दोन

बाजू प्रत्येकीं **बफ, फग** ह्या दोन बाजू बराबर आहेत; आणि **अफग** कोन **बफग** कोना बराबर आहे; (१. व्या. १०)

म्हणून **अग** पाया **बग** पाया बराबर आहे; (१.४)



ह्यास्तव **ग** मध्यापासून **गअ** अंतरानें वर्तुळ काढलें, तर तें **ब** बिंदूंतून जाईल.

असें काढलेलें वर्तुळ **अहब** आहे;

तर **अहब** वर्तुळखंडांतील कोन दिलेल्या **क** कोना बराबर होईल.

कारण, **अई** व्यासाच्या **अ** टोंकापासून **अई** वर **अड** लंब काढला आहे; (रचना)

म्हणून **अड, अहब** वर्तुळास स्पर्श करिते. (३.१६, कुरलरी)

आणि **अ** स्पर्शबिंदूपासून **अब** काढली आहे;

म्हणून **डअब** कोन व्युत्क्रम **अहब** खंडांतील कोना बराबर आहे. (३.३२)

परंतु **डअब** कोन **क** कोना बराबर आहे; (रचना)

म्हणून **अहब** खंडांतील कोन, **क** कोना बराबर आहे. (प्र. प्र. १)

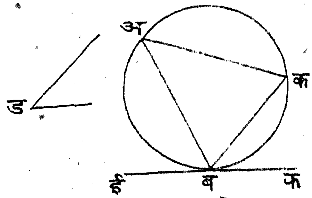
ह्याकरितां, दिलेल्या अब रेषेवर अहब वर्तुलखंड काढलें आहे, आणि त्यांतील कोन दिलेल्या क कोना बराबर आहे.

सिद्धांत ३४. कृत्य.

दिलेल्या कोना बराबर ज्यांतील कोन होईल असें दिलेल्या वर्तुळाचें खंड पाडावयाचें.

अबक दिलेलें वर्तुळ आहे, आणि **ड** दिलेला कोन आहे; तर ज्यांतील कोन, **ड** कोना बराबर होईल असें **अबक** वर्तुळाचें खंड पाडावयाचें आहे.

अबक वर्तुळास **ब** बिंदूशीं स्पर्श करणारी **ईफ** रेष काढ; (३.१७)



आणि बफ रेषेंत ब बिंदूशीं ड कोना बरावर फबक कोन कर. (१. २३)

म्हणजे बअक खंडांतील कोन, ड कोना बरावर होईल.

ईफ रेषा अबक वर्तुळास स्पर्श करिते, आणि ब स्पर्शबिंदूपासून बक काढली आहे, (रचना)

म्हणून फबक कोन, वर्तुळाच्या व्युत्क्रम बअक खंडांतील कोना बरावर आहे. (३. ३२)

परंतु फबक कोन ड कोना बरावर आहे, (रचना)

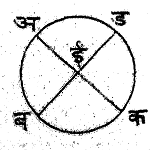
म्हणून बअक खंडांतील कोन ड कोना बरावर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्याकरितां, अबक दिलेल्या वर्तुळाचें बअक खंड असें पाडलें आहे कीं त्यांतील कोन दिलेल्या ड कोना बरावर आहे.

सिद्धांत ३५. प्रमेय.

जर वर्तुळांत दोन रेषा एकमेकींस कापतात, तर एकीच्या विभागांनीं झालेला काटकोन चौकोन दुसरीच्या विभागांनीं झालेल्या काटकोन चौकोना बरावर होतो.

अबकड वर्तुळांत अक, बड रेषा एकमेकीस ई बिंदूंत कापतात; तर अई, ईक ह्यांनीं झालेला काटकोन चौकोन, बई, ईड ह्यांनीं झालेल्या काटकोन चौकोना बरावर होईल.

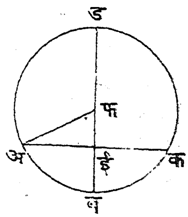


(१) जर अक, बड ह्या दोन्ही रेषा मध्यांतून जातात, म्हणजे त्यांचा छेदनबिंदु ई, वर्तुळाचा मध्य आहे, तर ईअ, ईब, ईक, ईड ह्या सर्व रेषा परस्पर बरावर आहेत; (१.व्याख्या १५)

म्हणून अई, ईक काटकोन चौकोन, बई, ईड काटकोन चौकोना बरावर आहे.

(२) परंतु त्या रेषांपैकीं एक बड, मध्यांतून जाऊन,

मध्यांतून न जाणाऱ्या दुसऱ्या अक स काटकोनानें ई बिंदूंत छेदते, तेव्हां बड, फ बिंदूंत दुभाग, (१.१०)
म्हणजे फ च अबकड वर्तुळाचा मध्य होतो; अफ सांध.

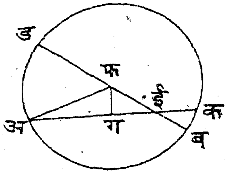


तेव्हां मध्यांतून जाणारी बड, मध्यांतून न जाणाऱ्या अक स काटकोनानें ई बिंदूंत छेदते, (प्रतिज्ञा)
म्हणून अई, ईक बराबर आहे. (३.३)

आणि बड रेषेचे फ बिंदूंत दोन समान विभाग आणि ई बिंदूंत दोन असमान विभाग झाले आहेत.
म्हणून बई, ईड काटकोन चौकोन आणि ईफ वरील चौरस मिळून, फब वरील चौरसा बराबर, (२.५)
म्हणजे अफ वरील चौरसा बराबर आहेत,
कारण फअ, फब बराबर आहे. (१. व्याख्या१५)
परंतु अफ वरील चौरस, अई आणि ईफ ह्यांवरील चौरसां बराबर आहे. (१. ४७)
म्हणून बई, ईड काटकोन चौकोन आणि ईफ वरील चौरस मिळून, अई व ईफ ह्यांवरील चौरसां बराबर आहेत. (प्र.प्र.१)
साधारण ईफ वरील चौरस काढून टाक;
म्हणून शेष बई, ईड काटकोन चौकोन, शेष अई वरील चौरसा बराबर, (प्र.प्र.३)
म्हणजे अई, ईक काटकोन चौकोना बराबर आहे.

(३) जेव्हां मध्यांतून जाणारी बड, मध्यांतून न जाणाऱ्या अक स ई बिंदूंत काटकोनानें छेदीत नाहीं; तेव्हां बड, फ मध्यें दुभाग, म्हणजे फ च अबकड वर्तुळाचा मध्य होतो; अफ सांध, आणि फ पासून अक वर फग लंब काढ. (१.१२)

तेव्हां अग, गक बराबर आहे: (३.३)
म्हणून अई, ईक काटकोन चौकोन आणि ईग वरील चौरस मिळून, अग वरील चौरसा बराबर आहेत. (२.५)



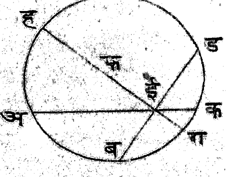
ह्या बराबरीच्या प्रत्येकास गफ वरील चौरस मिळीव;
म्हणून अई, ईक काटकोन चौकोन आणि ईग, गफ ह्यांवरील चौरस मिळून, अग, गफ ह्यांवरील चौरसां बराबर आहेत. (प्र. प्र. २)

परंतु ईग, गफ ह्यांवरील चौरस ईफ वरील चौरसा बराबर आहेत;
आणि अग, गफ ह्यांवरील चौरस अफ वरील चौरसा बराबर आहेत, (१. ४७)

म्हणून अई, ईक काटकोन चौकोन आणि ईफ वरील चौरस मिळून, अफ वरील चौरसा बराबर,
म्हणजे फब वरील चौरसा बराबर आहेत;
कारण, अफ, फब बराबर आहे. (१. व्याख्या १५)

परंतु फब वरील चौरस, बई, ईड काटकोन चौकोन आणि ईफ वरील चौरस ह्यां बराबर आहे. (२. ५)
म्हणून अई, ईक काटकोन चौकोन आणि ईफ वरील चौरस मिळून, बई, ईड काटकोन चौकोन आणि ईफ वरील चौरस ह्यां बराबर आहेत.
दोहींस साधारण ईफ वरील चौरस काढून टाक;
म्हणून शेष अई, ईक काटकोन चौकोन, शेष बई, ईड काटकोन चौकोना बराबर आहे. (प्र. प्र. ३)

(४) शेवटीं जेव्हां अक, बड ह्यां पैकीं एकही मध्यांतून जात नाहीं, तेव्हां फ वर्तुलमध्य काढ, (३. १)
आणि अक, बड ह्यांच्या ई छेदन बिंदूंतून गईफह व्यास काढ.



तेव्हां वर सिद्ध केल्याप्रमाणें गई, ईह काटकोन चौकोन, अई, ईक काटकोन चौकोना बराबर, आणि बई, ईड ह्याही काटकोन चौकोना बराबर आहे;
म्हणून अई, ईक काटकोन चौकोन

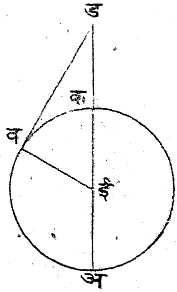
बई, ईड काटकोन चौकोना बराबर आहे. (.प्र.प्र. १)

ह्याकरितां, जर वर्तुळांत दोन रेघा इत्यादि.

सिद्धांत ३६. प्रमेय.

जर वर्तुळा बाहेरील एका बिंदूपासून त्या वर्तुळास कापणारी एक व स्पर्श करणारी एक अशा दोन रेघा काढल्या, तर सर्व कापणारी रेघ आणि तिचा वर्तुळा बाहेरील विभाग ह्यांनीं झालेला काटकोन चौकोन, स्पर्श रेघेवरील चौरसा बराबर होतो.

अबक वर्तुळा बाहेर एक ड बिंदु आहे; आणि त्यापासून डकअ व डब रेघा काढल्या आहेत; त्यांत डकअ रेघ वर्तुळास छेदते आणि डब स्पर्श करिते ; तर अड, डक काटकोनचौकोन डबवरील चौरसा बराबर होईल.



(१) जेव्हां डकअ रेघ ई मध्यांतून जाते, तेव्हां ईब सांध.

तेव्हां ईबड काटकोन आहे. (३.१८) आणि अक चे ई बिंदूंत दोन समान विभाग केले आहेत, आणि ती ड पर्यंत वाढविली आहे, म्हणून अड, डक काटकोनचौकोन आणि ईक वरील चौरस मिळून, ईड वरील चौरसा बराबर आहेत. (२.६) परंतु ईक, ईब बराबर आहे;

(१. व्याख्या १५)

ह्यास्तव अड, डक काटकोनचौकोन आणि ईब वरील चौरस मिळून, ईड वरील चौरसा बराबर आहेत.

परंतु इड वरील चौरस, ईब आणि बड ह्यांवरील चौरसां बराबर आहे, कारण ईबड कोन काटकोन आहे. (१.४७)

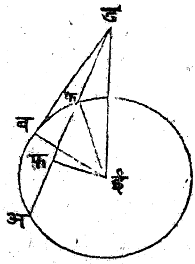
म्हणून अड, डक काटकोन चौकोन आणि ईब वरील चौरस मिळून, ईब आणि बड ह्यांवरील चौरसां बराबर आहेत.

प्रत्येकांतून ईब वरील चौरस काढून टाक;

म्हणून शेष अड, डक काटकोन चौकोन, शेष डब वरील चौरसा बरावर आहे. (प्र. प्र. २)

(२) जेव्हां डकअ रेघ मध्यांतून जात नाहीं, तेव्हां अबक वर्तुळाचा ई मध्य काढ; (३.१)
आणि ई पासून अक वर ईफ लंब काढ; (१.१२)
आणि ईब, ईक, ईड सांध.

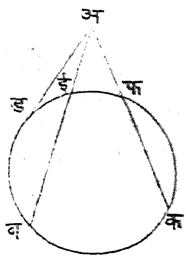
तेव्हां मध्यांतून जाणारी ईफ रेघ मध्यांतून न जाणाऱ्या अक रेघेवर लंब आहे, ह्यास्तव ती अक स दुभागते; (३.३)
म्हणून अफ, फक बरावर आहे.
आणि अक चे फ बिंदूंत दोन समान विभाग करून, ती ड बिंदूपर्यंत वाढविली आहे,
ह्यास्तव अड, डक कांटकोन चौकोन आणि फक वरील चौरस मिळून, फड वरील चौरसा बराबर आहेत. (२.६)
ह्या प्रत्येकास फई वरील चौरस मिळीव.
म्हणून अड, डक काटकोन चौकोन आणि कफ व फई ह्यांवरील चौरस मिळून, डफ, व फई ह्यांवरील चौरसां बराबर आहेत. (प्र.प्र. २)



परंतु कफ आणि फई ह्यांवरील चौरस मिळून, कई वरील चौरसा बराबर आहेत, कारण, कफई कोन काटकोन आहे; (१. ४७)
आणि असेंच डफ आणि फई ह्यांवरील चौरस, डई वरील चौरसा बराबर आहेत.

म्हणून अड, डक काटकोन चौकोन आणि कई वरील चौरस मिळून, डई वरील चौरसा बराबर आहेत;
परंतु कई, बई बराबर आहे; (१. व्याख्या १५)
म्हणून अड, डक काटकोन चौकोन आणि बई वरील चौरस मिळून, डई वरील चौरसा बराबर आहेत.

परंतु डई वरील चौरस, डब आणि बई ह्यांवरील चौरसां बराबर आहे; कारण ईबड कोन काटकोन आहे. (१.४७)
म्हणून अड, डक काटकोन चौकोन आणि बई वरील चौरस मिळून, डब आणि बई ह्यांवरील चौरसां बराबर आहेत.
ह्या दोहोंतून साधारण बई वरील चौरस काढून टाक;
म्हणून शेष अड, डक काटकोन चौकोन, शेष डब वरील चौरसा बराबर आहे. (प्र. प्र. ३)
ह्याकरितां, वर्तुळा बाहेर एक बिंदु घेऊन इत्यादि.



कुरलरी. जर वर्तुळा बाहेरील एका अ बिंदूपासून त्यास छेदणाऱ्या दोन अब आणि अक रेघा काढल्या, तर पहिली सर्व रेघ अब आणि तिचा वर्तुळा बाहेरील अई विभाग ह्यांनीं झालेला काटकोन चौकोन, दुसरी सर्व रेघ अक आणि तिचा वर्तुळा बाहेरील विभाग अफ ह्यांनीं झालेल्या काटकोन चौकोना बराबर असतो; कारण प्रत्येक काटकोन चौकोन अड स्पर्श रेघेवरील चौरसा बराबर आहे.

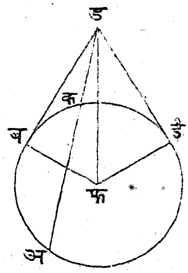
सिद्धांत ३७. प्रमेय.

जर वर्तुळा बाहेरील एका बिंदू पासून त्या वर्तुळास छेदणारी एक व मिळणारी एक अशा काढलेल्या दोन रेघांतून सर्व छेदणारी रेघ आणि वर्तुळा बाहेरील तिचा विभाग ह्यांनीं झालेला काटकोन-चौकोन, मिळणाऱ्या रेघेवरील चौरसां बराबर असला, तर ती मिळणारी रेघ त्या वर्तुळास स्पर्शरेघ होते.

अबक वर्तुळा बाहेरील एका ड बिंदूपासून डकअ आणि डब, दोन रेघा काढल्या आहेत; आणि त्यांतील डकअ, वर्तुळास छेदते, आणि डब, मिळते, आणि अड, डक काटकोन चौकोन डब वरील चौरसा बराबर आहे; तर डब, वर्तुळास स्पर्शरेघ होईल.

अबक वर्तुळास ड बिंदूपासून डई स्पर्श रेघ काढ ; (३.१७)
आणि वर्तुळाचा फ मध्य काढ ; (३.१)
आणि फब, फड, फई सांध.

तेव्हां फईड कोन काटकोन आहे. (३.१८)



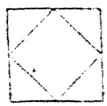
आणि अबक वर्तुळास डई स्पर्श करिते आणि डकअ कापते, ह्यास्तव अड, डक काटकोन चौकोन, डईवरील चौरसा बराबर आहे. (३.३६)
परंतु अड, डक काटकोन चौकोन, डब रेघे वरील चौरसा बराबर आहे. (प्रतिज्ञा)
म्हणून डई वरील चौरस डब वरील चौरसा बराबर आहे ; (प्र.प्र.१)
म्हणून डई रेघ डब रेघे बराबर आहे.

आणि ईफ, बफ बराबर आहे, (१. व्याख्या १५.)
म्हणून डई, ईफ ह्या दोन बाजू प्रत्येकीं डब, बफ ह्या दोन बाजूं बराबर आहेत; आणि डफ पाया डईफ आणि डबफ ह्या दोन त्रिकोणांस साधारण आहे;
म्हणून डईफ कोन डबफ कोना बराबर आहे; (१.८)
परंतु डईफ काटकोन आहे; (रचना)
म्हणून डबफ ही काटकोन आहे.
आणि बफ वाढविली असतां, ती व्यास होते; आणि तिच्या ब टोंकापासून तीवर काढलेला लंब बफ आहे.
म्हणून डब, अबक वर्तुळास स्पर्शरेघ आहे. (३.१६, कुरलरी)

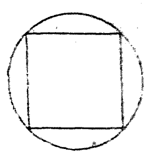
ह्याकरितां, वर्तुळा बाहेरील एका बिंदूपासून इत्यादि.

चवथें पुस्तक.

व्याख्या.

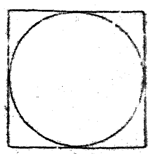


१. एक आकृति दुसरे आकृतींत असून, तिचा एकेक कोन दुसरीच्या एकेका बाजूंत असतो, तेव्हां ती पहिली आकृति दुसरींत काढली आहे असें म्हणतात.



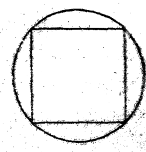
२. असेंच, एक आकृति दुसरे आकृती बाहेर असून, तिची एकेक बाजू दुसरीच्या एकेका कोनाच्या बिंदूंतून जाते, तेव्हां पहिली आकृति दुसरी भोंवतीं काढली आहे असें म्हणतात.

३. जेव्हां एक आकृति वर्तुळांत असून तिचे सर्व कोन वर्तुळाच्या परिघावर असतात, तेव्हां ती आकृति त्या वर्तुळांत काढली आहे असें म्हणतात.



४. जेव्हां एक आकृति वर्तुळा बाहेर असून, तिची प्रत्येक बाजू त्या वर्तुळाच्या परिघास स्पर्शरेघ होते, तेव्हां ती आकृति त्या वर्तुळाभोंवतीं काढली आहे असें म्हणतात.

५. असेंच, जेव्हां वर्तुळाचा परिघ एकादे आकृतीच्या प्रत्येक बाजूस स्पर्श करितो, तेव्हां तें वर्तुळ त्या आकृतींत काढलें आहे असें म्हणतात.



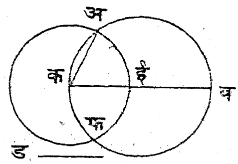
६. जेव्हां एक वर्तुळ एकादे आकृती बाहेर असून, त्याचा परिघ त्या आकृतीच्या सर्व कोनांच्या बिंदूंतून जातो, तेव्हां तें वर्तुळ त्या आकृती भोंवतीं काढलें आहे असें म्हणतात.

७. जेव्हां रेघेचीं टोंकें वर्तुळाच्या परिघांत असतात तेव्हां ती रेघ वर्तुळांत ठेविली आहे असें म्हणतात.

सिद्धांत १. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुळांत, त्याच्या व्यासा पेक्षां मोठी नसणाऱ्या दिलेल्या रेघे एवढी रेघ ठेवावयाचें.

अबक दिलेलें एक वर्तुळ आहे, आणि त्याच्या व्यासापेक्षां मोठी नसणारी **ड** एक दिलेली रेघ आहे; तर **अबक** वर्तुळांत **ड** एवढी रेघ ठेवावयाची आहे.



अबक वर्तुळाचा **बक** व्यास काढ. तेव्हां जर **बक** रेघ **ड** रेघे बराबर आहे, तर जें करावयाचें आहे तें झालें; कारण, **अबक** वर्तुळांत **ड** एवढी रेघ ठेविली आहे.

परंतु जेव्हां **बक** रेघ **ड** बराबर नाहीं, पण **ड** पेक्षां मोठी आहे; (प्रतिज्ञा)
तेव्हां **कई** रेघ **ड** बराबर कर; (१.३)
आणि **क** मध्य धरून, **कई** अंतरानें **अईफ** वर्तुळ काढ, आणि **कअ** सांध.

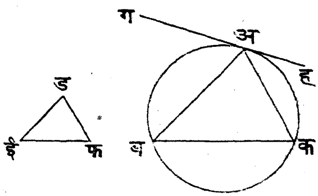
तेव्हां **अईफ** वर्तुळाचा **क** मध्य आहे,
म्हणून **कअ, कई** बराबर आहे; (१. व्याख्या १५)
परंतु **कई, ड** बराबर आहे. (रचना)
म्हणून **कअ, ड** बराबर आहे. (प्र. प्र. १)

ह्याकरितां, **अबक** वर्तुळांत व्यासापेक्षां मोठी नसणाऱ्या **ड** रेघेएवढी **कअ** रेघ ठेविली आहे.

सिद्धांत २. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुळांत, दिलेल्या त्रिकोणाशीं समकोण असा एक त्रिकोण काढावयाचें.

अबक दिलेलें वर्तुळ आहे, आणि **डईफ** दिलेला त्रिकोण आहे; तर **अबक** वर्तुळांत **डईफ** त्रिकोणाशीं समकोण त्रिकोण काढावयाचा आहे.



अबक वर्तुळास अ बिंदूशीं स्पर्श करणारी गअह रेघ काढ, (३.१७)
आणि अह रेघेंत अ बिंदूशीं हअक कोन डईफ कोना बरोबर कर; आणि अग रेघेंत अ बिंदूशीं गअब कोन डफई कोना बरोबर कर; (१.२३)
आणि बक सांध, म्हणजे अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणाशीं समकोण होईल.

कारण, गअह रेघ अबक वर्तुळास स्पर्श करिते, आणि अ स्पर्शबिंदूपासून अक रेघ काढली आहे, (रचना)
म्हणून हअक कोन व्युत्क्रम खंडांतील अबक कोना बरोबर आहे. (३.३२)
परंतु हअक कोन डईफ कोना बरोबर आहे; (रचना)
म्हणून अबक कोन डईफ कोना बरोबर आहे. (प्र. प्र. १)

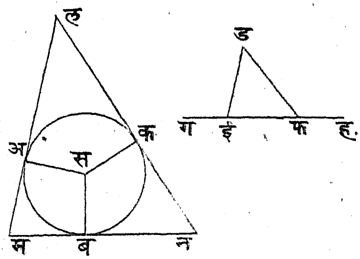
ह्याच कारणास्तव अकब कोन डफई कोना बरोबर आहे.
म्हणून तिसरा बअक कोन तिसऱ्या ईडफ कोना बरोबर आहे. (१. ३२, प्र. प्र. ११ आणि ३)

ह्याकरितां, अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणाशीं समकोण आहे, आणि तो अबक वर्तुळांत काढला आहे.

सिद्धांत ३. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुळा भोंवतीं दिलेल्या त्रिकोणाशीं समकोण असा एक त्रिकोण काढावयाचें.

अबक एक दिलेलें वर्तुळ आहे, आणि डईफ एक दिलेला त्रिकोण आहे; तर अबक वर्तुळा भोंवतीं, डईफ त्रिकोणाशीं समकोण असा एक त्रिकोण काढावयाचा आहे.



ईफ बाजू दोहों अंगांस ग आणि ह बिंदूं पर्यंत वाढीव; आणि अबक वर्तुळाचा स मध्य काढ; (३.१) आणि स पासून परिघा पर्यंत सब रेघ काढ; आणि स बिंदूशीं सब रेषेंत, बसअ कोन डईग कोना बराबर कर; आणि बसक कोन डफह कोना बराबर कर; (१. २३)
आणि अबक वर्तुळास अ, ब, क ह्या बिंदूंशीं स्पर्श करणाऱ्या लअम, मबन, नकल रेघा काढ. (३. १७)
म्हणजे लमन त्रिकोण अबक वर्तुळा भोंवतीं, आणि डईफ त्रिकोणाशीं समकोण होईल.

कारण, लम, मन, नल ह्या रेघा अबक वर्तुळास अ, ब, क, बिंदूंशीं स्पर्श करितात; (रचना)
आणि स मध्यापासून स्पर्शबिंदूंपर्यंत सअ, सब, सक ह्या रेघा काढल्या आहेत,
म्हणून अ, ब, क ह्या बिंदूंशीं जे कोन होतात, ते सर्व प्रत्येकीं काटकोन आहेत. (३. १८)
आणि अमबस चौकोनाचे चार कोन मिळून, चार काटकोनां बराबर आहेत; (१. ३२, कुर. १)
आणि त्यांतून सअम आणि सबम हे दोन कोन प्रत्येकीं काटकोन आहेत;
म्हणून दुसरे असब आणि अमब हे दोन कोन मिळून, दोन काटकोनां बराबर आहेत. (प्र. प्र. ३)
परंतु डईग आणि डईफ हे दोन कोन मिळून, दोन काटकोनां बराबर आहेत; (१.१३)
म्हणून असब आणि अमब हे दोन कोन, डईग आणि डईफ ह्या दोन कोनां बराबर आहेत. (प्र. प्र. ११ व १)

आणि ह्यांतील **असब** कोन **डईग** कोना बराबर आहे ; (रचना)
म्हणून शेष **अमब** कोन, शेष डफई कोना बराबर आहे, (प्र. प्र.३)

ह्याप्रमाणेंच असें दाखवितां येईल कीं, **लनम** कोन डफई कोना बराबर आहे.

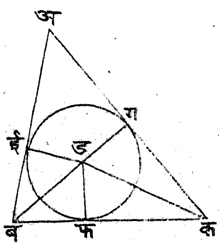
म्हणून तिसरा मलन कोन तिसऱ्या ईडफ कोना बराबर आहे. (१.३२, प्र. प्र. ११ व ३)

ह्याकरितां, **लमन** त्रिकोण **डईफ** त्रिकोणाशीं समकोण आहे, आणि तो **अबक** वर्तुळाभोंवतीं काढला आहे.

सिद्धांत ४. कृत्य.

दिलेल्या त्रिकोणांत वर्तुळ काढावयाचें.

अबक एक दिलेला त्रिकोण आहे ; तर त्यांत एक वर्तुळ काढावयाचें आहे.



अबक आणि **अकब** कोन ड बिंदूंत मिळणाऱ्या **बड** आणि **कड** रेषांनीं दुभाग ; (१.९)
आणि ड बिंदूपासून **अब**, **बक**, **कअ**, ह्यांवर **डई**, **डफ**, **डग** हे लंब काढ. (१. १२)

तेव्हां **अबक** कोन **बड** रेषेनें दुभागला आहे, ह्यास्तव **ईबड** कोन **फबड** कोना बराबर आहे, (रचना)
आणि **बईड** काटकोन **बफड** काटकोना बराबर आहे ; (प्र.प्र.११)
म्हणून **ईबड** आणि **फबड** ह्या दोन त्रिकोणांत एकाचे दोन कोन दुसऱ्याच्या दोन कोनांशीं प्रत्येकीं बराबर आहेत ; आणि समान कोनांतून एका समोरील **बड** बाजू दोहों त्रिकोणांस साधारण आहे ;
म्हणून **डई** बाजू **डफ** बाजूबराबर आहे. (१.२६)

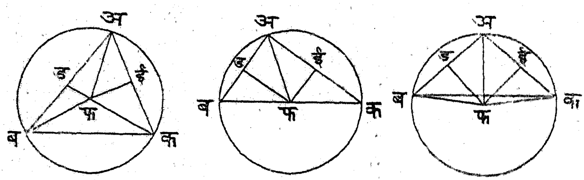
ह्याच कारणास्तव **डग**, **डफ** बराबर आहे.
म्हणून **डई**, **डग** बराबर आहे. (प्र. प्र.१)

म्हणून डई, डफ, डग ह्या तीन रेघा परस्पर बराबर आहेत, आणि ड मध्यापासून ह्या तिघांतून एका रेघे इतक्या अंतरानें वर्तुळ काढल्यास, तें दुसऱ्या दोन रेघांच्या टोंकांतून जाईल;
आणि तें अब, बक, कअ ह्यांस स्पर्श करील; कारण, त्या रेघा ड मध्यांतून जाणाऱ्या डई, डफ, डग ह्या रेघांच्या टोंकांवर लंब आहेत. (३.१६, कुरलरी)
ह्याकरितां, दिलेल्या अबक त्रिकोणांत ईफग वर्तुळ काढलें आहे.

सिद्धांत ५. कृत्य.

दिलेल्या त्रिकोणा भोंवतीं वर्तुळ काढावयाचें.

अबक एक दिलेला त्रिकोण आहे; तर त्याभोंवतीं वर्तुळ काढावयाचें आहे.



अब आणि अक, ड आणि ई बिंदूंत दुभाग; (१.१०)
आणि त्या बिंदूंतून अब आणि अक ह्यांवर डफ आणि ईफ लंब काढ. (१.११)
डफ आणि ईफ वाढविल्या असतां मिळतील;
कारण, जर त्या मिळत नाहींत तर त्या समांतर आहेत,
म्हणून त्यांवरील अब आणि अक लंबही समांतर आहेत; पण ही गोष्ट प्रतिज्ञाविरुद्ध आहे.
डफ आणि ईफ, फ बिंदूशीं मिळत पर्यंत वाढीव,
आणि फअ सांध;
आणि फ बिंदु बक बाजूंत नसल्यास, बफ आणि कफ ही सांध.
तेव्हां अड, बड बराबर आहे, (रचना)

आणि **अफड**, **बफड** त्रिकोणांस **डफ** साधारण असून, **अब** वर लंब आहे; म्हणून **फअ** पाया **फब** पाया बराबर आहे. (१.४)

ह्याच रीतीनें असें दाखवितां येईल कीं **फक**, **फअ** बराबर आहे. म्हणून **फब**, **फक** बराबर आहे; (प्र. प्र. १)

आणि **फअ**, **फब**, **फक** ह्या तीन रेघा परस्पर बराबर आहेत. म्हणून **फ** मध्य धरून ह्या तीन रेघां पैकीं कोणत्याही एका रेघेनें वर्तुळ काढलें असतां, तें दुसऱ्या दोन रेघांच्या शेवटांतून जाईल, आणि तें **अबक** त्रिकोणा भोंवतीं होईल.

ह्याकरितां, **अबक** दिलेल्या त्रिकोणा भोंवतीं **अबक** वर्तुळ काढलें आहे.

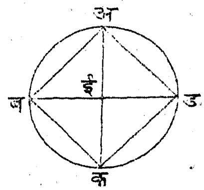
क्रुरलरी. आणि हें उघड आहे, कीं वर्तुळाचा मध्य जेव्हां त्रिकोणांत पडतो तेव्हां त्याचा प्रत्येक कोन काटकोनाहून कमी असतो; कारण, तो अर्धवर्तुळाहून मोठ्या वर्तुळखंडांत असतो; आणि जेव्हां मध्य, त्रिकोणाच्या एका बाजूंत पडतो, तेव्हां त्या बाजू समोरील कोन अर्धवर्तुळांत असल्यामुळें काटकोन असतो; आणि जेव्हां मध्य, त्रिकोणा बाहेर पडतो, तेव्हां तो ज्या बाजू पलीकडे असतो त्या बाजू समोरील कोन अर्धवर्तुळा पेक्षां कमी वर्तुळखंडांत असल्यामुळें काटकोनाहून मोठा असतो. (३. ३१)

म्हणून, उलट; जर दिलेला त्रिकोण लघुकोण त्रिकोण आहे, तर वर्तुळाचा मध्य त्यांत पडतो; जर तो काटकोन त्रिकोण आहे, तर वर्तुळाचा मध्य काटकोना समोरील बाजूंत पडतो, आणि जर तो विशालकोण त्रिकोण आहे, तर वर्तुळाचा मध्य त्रिकोणा बाहेर विशालकोणा समोरील बाजू पलीकडे पडतो.

सिद्धांत ६. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुळांत चौरस काढावयाचें.

अबकड एक दिलेलें वर्तुळ आहे; तर त्यांत एक चौरस काढावयाचा आहे.



अबकड वर्तुळांत अक, बड हे दोन व्यास एकमेकावर लंब काढ; (३.१,१.११)

आणि अब, बक, कड, डअ सांध. म्हणजे अबकड आकृति चौरस होईल.

कारण, ई मध्य आहे,

म्हणून बई, डई बराबर आहे; (१. व्याख्या १५)

आणि अबई आणि अईड ह्या दोन त्रिकोणांस ईअ साधारण असून, बड वर लंब आहे;

म्हणून बअ पाया डअ पाया बराबर आहे. (१. ४)

आणि ह्याच कारणास्तव बक, डक परस्पर बराबर असून, प्रत्येकीं बअ शीं किंवा डअ शीं बराबर आहेत.

म्हणून अबकड चौकोन समभुज आहे.

आणि तो काटकोन चौकोनही आहे;

कारण, अबकड वर्तुळाचा बड व्यास आहे,

म्हणून बअड अर्धवर्तुळ आहे; (रचना)

म्हणून बअड कोन काटकोन आहे. (३.३१)

आणि ह्याच कारणास्तव अबक, बकड, कडअ, ह्या कोनांतील प्रत्येक काटकोन आहे;

म्हणून अबकड चौकोन काटकोन चौकोन आहे.

आणि तो समभुज आहे असें वर दाखविलें आहे;

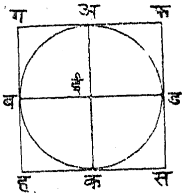
म्हणून तो चौरस आहे.

ह्याकरितां, दिलेल्या वर्तुळांत अबकड चौरस काढला आहे.

सिद्धांत ७. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुळा भोंवतीं चौरस काढावयाचें.

अबकड एक दिलेलें वर्तुळ आहे; तर त्या भोंवतीं एक चौरस काढावयाचा आहे.



अबकड वर्तुळांत अक, बड हे दोन व्यास एकमेकावर लंब काढ, (३.१,१.११)

आणि अ, ब, क, ड, ह्या बिंदूंतून फग, गह, हस, सफ त्या वर्तुळास स्पर्शरेघा काढ. (३.१७)

म्हणजे गहसफ आकृति विवक्षित चौरस होईल.

कारण, अबकड वर्तुळास फग स्पर्श करिते, आणि ई मध्यापासून अ स्पर्श बिंदूपर्यंत ईअ काढली आहे, (रचना)
म्हणून अ बिंदूशीं झालेले कोन काटकोन आहेत. (३.१८)
ह्याच कारणास्तव ब, क, ड बिंदूशीं झालेले कोनही काटकोन आहेत.
आणि अईब काटकोन आहे, (रचना)
आणि ईबगही काटकोन आहे,
म्हणून गह रेघ अक रेघेशीं समांतर आहे. (१.२८)
आणि ह्याच कारणास्तव अक, फस शीं समांतर आहे.

ह्याप्रमाणेंच असें दाखवितां येईल कीं गफ, ईस ह्या रेघांतील प्रत्येक बड शीं समांतर आहे.
म्हणून गस, गक, कफ, फब, बस ह्या सर्व आकृति समांतरभुज चौकोन आहेत;
ह्यास्तव गफ, हस बराबर आहे, आणि गह, फस बराबर आहे. (१.३४)
आणि अक, बड बराबर आहे,
आणि अक ही गह, फस ह्यांतून प्रत्येकी बराबर आहे,
आणि बड ही गफ, हस ह्यांतून प्रत्येकी बराबर आहे,
म्हणून गह, फस ह्या प्रत्येकीं गफशीं किंवा हस शीं बराबर आहेत;
म्हणून फगहस चौकोन समभुज आहे.

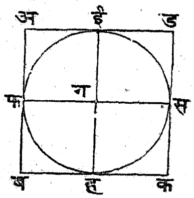
आणि तो काटकोन चौकोनही आहे ;
कारण, अईबग समांतरभुज चौकोन आहे, आणि अईब कोन काटकोन आहे;

म्हणून अगब कोनही काटकोन आहे. (१.२८)
ह्याप्रमाणेंच असें दाखवितां येईल, कीं ह, स, फ ह्या बिंदूंशीं झालेले कोन काटकोन आहेत.
म्हणून फगहस काटकोन चौकोन आहे.
आणि तो समभुज आहे असें वर दाखविलेंच आहे,
म्हणून तो चौरस आहे.
ह्याकरितां, दिलेल्या वर्तुळा भोंवतीं चौरस काढला आहे.

सिद्धांत ८, कृत्य.

दिलेल्या चौरसांत वर्तुळ काढावयाचें.

अबकड एक दिलेला चौरस आहे; तर त्यामध्यें वर्तुळ काढावयाचें आहे.



अब, अड ह्यांतील प्रत्येक बाजू फ, ई ह्या बिंदूंत दुभाग (१.१०)
आणि ई बिंदूंतून अब शीं किंवा डक- शीं ईह समांतर काढ; आणि फ बिंदूं- तून अड शीं किंवा बक शीं फस स- मांतर काढ. (१.३१)

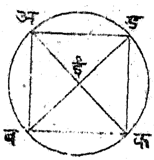
तेव्हां अस, सब, अह, हड, अग, गक, बग, गड ह्या सर्व आकृति प्रत्येकीं काटकोन समांतरभुज चौकोन आहेत;
आणि त्यांच्या समोरा समोरील बाजू बराबर आहेत. (१. ३४)
आणि अड, अब बराबर आहे, (१. व्याख्या ३०)
आणि अई, अड चें अर्ध आहे, आणि अफ, अब चें अर्ध आहे. (रचना)
म्हणून अई, अफ बराबर आहे. (प्र. प्र. ७)
ह्यास्तव त्यांसमोरील बाजू बराबर आहेत, म्हणजे फग, गई बरा- बर आहे. (१. ३४)

ह्याप्रमाणेंच असें दाखवितां येईल कीं गह, गस ह्या रेषा प्रत्येकीं फग अथवा गई ह्या रेषेबराबर आहेत.
म्हणून गई, गफ, गह, गस ह्या चार रेषा परस्पर बराबर आहेत, आणि ग मध्य धरून ह्या चार रेषां पैकीं कोणत्याही एका रेषेनें वर्तुळ काढलें असतां, तें दुसऱ्या तीन रेषांच्या शेवटांतून जाईल.
आणि तें, अब, बक, कड, डअ ह्या चार रेषांस स्पर्श करील; कारण ई, फ, ह, स ह्या चार बिंदूंशीं झालेले कोन काटकोन आहेत; आणि फस, ईह व्यास आहेत. (३.१६, कुर.)
म्हणून अब, बक, कड, डअ ह्या चार रेषा त्या वर्तुळास स्पर्श करितात.
ह्याकरितां, दिलेल्या चौरसांत वर्तुळ काढलें आहे.

सिद्धांत ९. कृत्य.

दिलेल्या चौरसा भोंवतीं वर्तुळ काढावयाचें.

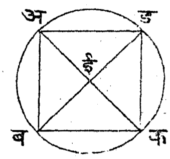
अबकड एक दिलेला चौरस आहे; तर त्याभोंवतीं वर्तुळ काढावयाचें आहे.



अक आणि बड सांध,
म्हणजे त्या ई बिंदूंत छेदितील.
तेव्हां अब, अड बराबर आहे, (१. व्याख्या ३०)
आणि बअक आणि डअक ह्या दोन त्रिकोणांस अक साधारण आहे;
म्हणून बअ, अक बाजू डअ, अक बाजूंशीं प्रत्येकीं बराबर आहेत.
आणि बक पाया डक पाया बराबर आहे; (१. व्याख्या ३०)
म्हणून बअक कोन डअक कोना बराबर आहे; (१.८)
ह्यास्तव बअड कोन अक रेषेनें दुभागला आहे.
ह्याप्रमाणेंच असें दाखवितां येईल कीं अबक, बकड, कडअ हे कोन बड आणि अक ह्या रेषांनीं दुभागले आहेत.
आतां, डअब कोन अबक कोना बराबर आहे,
आणि ईअब कोन डअब कोनाचें अर्ध आहे,

आणि ईबअ कोन अबक कोनाचें अर्ध आहे, म्हणून ईअब कोन ईबअ कोना बराबर आहे; (प्र. प्र. ७)

ह्यास्तव ईअ बाजू ईब बाजू बराबर आहे. (१.६)



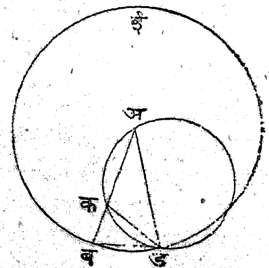
ह्याप्रमाणेंच असें दाखवितां येईल कीं ईक, ईड ह्या रेषा प्रत्येकीं ईअ अथवा ईब रेषेशीं बराबर आहेत.

ह्याकारितां ईअ, ईब, ईक, ईड ह्या चार रेषा परस्पर बराबर आहेत, आणि ई मध्य धरून ह्या चार रेषां पैकीं कोणत्या तरी एका रेषे इ-तक्या अंतरानें वर्तुळ काढलें असतां, तें इतर तीन रेषांच्या शेवटांतून जाईल, आणि तें अबकड चौरसा भोंवतीं होईल.

ह्याकारितां, दिलेल्या चौरसा भोंवतीं वर्तुळ काढलें आहे.

सिद्धांत १०. कृत्य.

ज्याच्या पायाकडील प्रत्येक कोन तिसऱ्या कोनाच्या दुपट होईल असा एक समद्विभुज त्रिकोण काढावयाचें.



अब एक रेष घेऊन, तिचे क बिंदूंत असे दोन विभाग कर, कीं अब, बक काटकोन चौकोन, अक वरील चौरसा बराबर होईल; (२.११) आणि अ मध्या पासून अब अंतरानें बडई वर्तुळ काढ, आणि त्या मध्यें बडई वर्तुळाच्या व्यासापेक्षां मोठी नसणाऱ्या अक रेषे एवढी बड रेष ठेव; (४.१) आणि डअ सांध.

अबड विवक्षित त्रिकोण होईल; म्हणजे त्याचे अबड व अडब ह्यांतून प्रत्येक कोन तिसऱ्या बअड कोनाची दुपट होईल.

डक सांध; आणि अकड त्रिकोणा भोंवतीं अकड वर्तुळ काढ. (४.५)

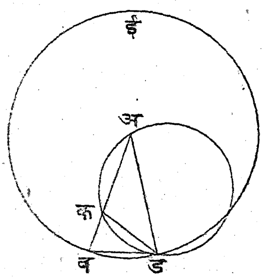
तेव्हां अब, बक काटकोन चौकोन, अक वरील चौरसा बराबर (रचना)
आहे;
आणि अक, बड बराबर आहे; (रचना)
म्हणून अब, बक काटकोन चौकोन, बड वरील चौरसा बराबर आहे.

आणि अकड वर्तुळा बाहेरील ब बिंदू पासून बकअ व बड ह्या दोन रेघा परिघा पर्यंत काढल्या आहेत, आणि त्यांपैकीं एक, वर्तुळास छेदिते, आणि दुसरी त्यास मिळते,
आणि सर्व छेदनरेघ आणि तिचा वर्तुळा बाहेरील विभाग ह्यांनीं झालेला अब, बक काटकोन चौकोन, वर्तुळास मिळणाऱ्या बड रेघे वरील चौरसा बराबर आहे;
म्हणून बड रेघ अकड वर्तुळास स्पर्श करिते. (३.३७)

आणि बड रेघ अकड वर्तुळास स्पर्श करिते, आणि ड स्पर्शबिंदू पासून डक रेघ काढली आहे,
म्हणून बडक कोन व्युत्क्रम खंडांतील डअक कोना बराबर आहे. (३.३२)

ह्यांतील प्रत्येकास कडअ कोन मिळीव;
म्हणून सगळा बडअ कोन, कडअ आणि डअक ह्या दोन कोनां (प्र. प्र. २)
बराबर आहे.
परंतु बाहेरील बकड कोन, कडअ आणि डअक ह्या दोन कोनां (१. ३२)
बराबर आहे,
म्हणून बडअ कोन बकड कोना बराबर आहे. (प्र. प्र. १)
परंतु बडअ कोन डबअ कोना बराबर आहे; (१. ५)
कारण अड, अब बराबर आहे. (१. व्याख्या १५)
म्हणून बडअ आणि डबअ ह्यांतील प्रत्येक कोन बकड कोना बराबर आहे. (प्र. प्र. १)

आणि डबक कोन बकड कोना बराबर आहे,
ह्यास्तव डब बाजू डक बाजू बराबर आहे; (१. ६)
परंतु डब, कअ बराबर आहे; (रचना)



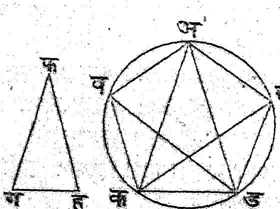
म्हणून कअ, कड बराबर आहे, (प्र.प्र. १)
आणि ह्यास्तव कअड कोन कडअ कोनाबराबर आहे. (१.५)
म्हणून कअड आणि कडअ हे दोन कोन मिळून, कअड कोनाची दुपट आहेत.
परंतु बकड कोन, कअड आणि कडअ ह्या दोन कोनां बराबर आहे; (१.३२)
म्हणून बकड कोन, कअड कोनाची दुपट आहे.
आणि बकड कोन, बडअ आणि डबअ ह्या कोनांतील प्रत्येका बराबर आहे असें वर दाखविलें आहे;
म्हणून बडअ आणि डबअ हे प्रत्येकीं बअड कोनाची दुपट आहेत.

ह्याकरितां, ज्या समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायाकडील प्रत्येक कोन तिसऱ्या कोनाची दुपट आहे असा एक त्रिकोण काढला आहे.

सिद्धांत ११. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुळांत समभुज आणि समकोण पंचकोण काढावयाचें.

अबकडई दिलेलें वर्तुळ आहे; तर त्यांत समभुज आणि समकोण पंचकोण काढावयाचा आहे.



फगह एक समद्विभुज त्रिकोण असा काढ, कीं त्याचे पायाकडील ग आणि ह कोन प्रत्येकीं फ कोनाची दुपट आहेत. (४.१०)
आणि अबकडई वर्तुळांत फगह त्रिकोणाशीं अकड त्रिकोण समकोण काढ, म्हणजे कअड कोन फ कोना बराबर होईल, आणि अकड अथवा अडक कोन ग अथवा ह कोना बराबर होईल; (४.२)

म्हणून अकड आणि अडक हे कोन प्रत्येकीं कअड कोनाची दुपट आहेत;

अकड आणि अडक हे कोन कई आणि डब रेघांनीं दुभाग; (१.९)

आणि अब, बक, अई, ईड सांध.

म्हणजे अबकडई समभुज व समकोण पंचकोण होईल.

कारण, अकड आणि अडक हे कोन प्रत्येकीं कअड कोनाची दुपट आहेत.

आणि कई आणि डब ह्या रेघांनीं ते दुभागले आहेत, (रचना)

म्हणून अडब, बडक, कअड, डकई, ईकअ हे पांच कोन परस्पर बराबर आहेत.

परंतु समान कोन समान कौंसांवर असतात; (३.२६)

म्हणून अब, बक, कड, डई, ईअ हे पांच कौंस परस्पर बराबर आहेत;

आणि समान कौंसांचीं टोंकें सांधणाऱ्या रेघा बराबर असतात; (३.२९)

म्हणून अब, बक, कड, डई, ईअ ह्या पांच रेघा परस्पर बराबर आहेत.

आणि ह्यास्तव अबकडई पंचकोण समभुज आहे.

आणि तो समकोणही आहे.

कारण, अब कौंस डई कौंसा बराबर आहे;

ह्या प्रत्येकास बकड कौंस मिळीव;

म्हणून सगळा अबकड कौंस, सगळ्या बकडई कौंसा बराबर आहे. (प्र. प्र. २)

आणि अईड कोन अबकड कौंसावर आहे,

आणि बअई कोन बकडई कौंसावर आहे.

म्हणून अईड कोन बअई कोना बराबर आहे. (३.२७)

ह्याच कारणास्तव अबक, बकड, कडई हे कोन प्रत्येकीं अईड अथवा बअई कोना बराबर आहेत.

म्हणून अबकडई पंचकोण समकोण आहे.

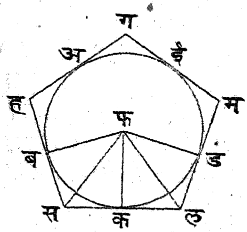
आणि तो समभुज आहे असें वर दाखविलें आहे.

ह्याकरितां, समभुज आणि समकोण पंचकोण दिलेल्या वर्तुळांत काढला आहे.

सिद्धांत १२. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुळा भोंवतीं समभुज आणि समकोण पंचकोण काढावयाचें.

अबकडई दिलेलें वर्तुळ आहे; तर त्यांत समभुज आणि समकोण पंचकोण काढावयाचा आहे.



मागील सिद्धांता प्रमाणें वर्तुळांत काढलेल्या पंचकोणाचीं टोंकें अ, ब, क, ड, ई आहेत, म्हणजे अब, बक, कड, डई, ईअ हे कौंस परस्पर बराबर आहेत असें समज ;
आणि अ, ब, क, ड, ई ह्या बिंदूंतून वर्तुळास स्पर्श करणाऱ्या गह, हस, सल, लम, मग रेघा काढ. (३.१७)
म्हणजे गहसलम विवक्षित पंचकोण होईल.

वर्तुळाचा फ मध्य काढ, आणि फब, फस, फक, फल, फड सांध. (३.१, गृही. गो. १)
तेव्हां अबकडई वर्तुळास सल रेघ क बिंदूशीं स्पर्श करिते, आणि मध्यापासून फक रेघ काढली आहे.
म्हणून फक रेघ सल रेघेवर लंब आहे, (३.१८)
ह्यास्तव क बिंदूशीं झालेला प्रत्येक कोन काटकोन आहे.
ह्याच कारणास्तव ब आणि ड बिंदूशीं झालेले कोन काटकोन आहेत.

आणि फकस कोन काटकोन आहे, ह्यास्तव फस वरील चौरस, फक आणि कस ह्यांवरील चौरसां बराबर आहे. (१.४७)
ह्याच कारणास्तव फस वरील चौरस, फब आणि बस ह्यांवरील चौरसां बराबर आहे.

म्हणून फक आणि कस ह्यांवरील चौरस, फब आणि बस ह्यांवरील चौरसां बराबर आहेत. (प्र. प्र. १)
ह्यांत फक वरील चौरस फब वरील चौरसा बराबर आहे,
कारण फक, फब बराबर आहे ; (१. व्याख्या १५)
म्हणून शेष कस वरील चौरस, शेष बस वरील चौरसा बराबर आहे. (प्र. प्र. ३)
आणि ह्यास्तव कस रेघ बस रेघे बराबर आहे.

आणि फब, फक बराबर आहे. (१. व्याख्या १५)
आणि बफस आणि कफस त्रिकोणांस फस साधारण आहे;
म्हणून बफ, फस बाजू कफ, फस बाजूंशीं अनुक्रमें बराबर आहेत ;
आणि बस पाया कस पाया बराबर आहे असें वर दाखविलें आहे;
म्हणून बफस कोन कफस कोना बराबर आहे,
आणि बसफ कोन कसफ कोना बराबर आहे. (१.८)
म्हणून बफक कोन कफस कोनाची दुपट आहे,
आणि बसक कोन कसफ कोनाची दुपट आहे.

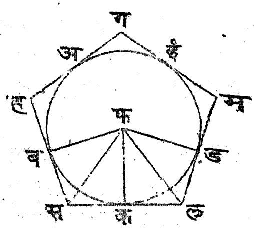
ह्याच कारणास्तव कफड कोन कफल कोनाची दुपट आहे, आणि कलड कोन कलफ कोनाची दुपट आहे.

आणि बक कौंस कड कौंसा बराबर आहे,
ह्यास्तव बफक कोन कफड कोना बराबर आहे, (३.२७)
आणि बफक कोन कफस कोनाची दुपट आहे, आणि कफड कोन कफल कोनाची दुपट आहे;
म्हणून कफस कोन कफल कोना बराबर आहे. (प्र. प्र. ७)
आणि फकस काटकोन फकल काटकोना बराबर आहे. (प्र. प्र. ११)
म्हणून फकस आणि फकल ह्या दोन त्रिकोणांत एकाचे दोन कोन दुसऱ्याच्या दोन कोनांशीं अनुक्रमें बराबर आहेत;
आणि बराबरीच्या कोनांच्या मधील फक बाजू दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे;
म्हणून कस रेघ कल रेघे बराबर आहे, आणि फसक कोन फलक कोना बराबर आहे. (१.२६)
आणि कस, कल बराबर आहे; ह्यास्तव लस, कस ची दुपट आहे.

ह्याप्रमाणेंच हस, बस ची दुपट आहे असें दाखवितां येईल.

आणि बस, कस बरावर आहे असें वर दाखविलें आहे,

आणि हस, बस ची दुपट आहे, आणि लस, कस ची दुपट आहे, म्हणून हस, लस बरावर आहे. (प्र.प्र.६)



ह्या रीतीनेंच असें दाखवितां येईल कीं गह, गम, मल ह्या रेषा प्रत्येकीं हस बरावर अथवा लस बराबर आहेत; म्हणून गहसलम पंचकोण समभुज आहे.

आणि तो समकोणही आहे.

कारण फसक कोन फलक कोना बरावर आहे;

आणि हसल कोन फसक कोनाची दुपट आहे,

आणि सलम कोन फलक कोनाची दुपट आहे असें वर दाखविलें आहे,

म्हणून हसल कोन सलम कोना बरावर आहे. (प्र.प्र. ६)

ह्या रीतीनें असें दाखवितां येईल कीं सहग, हगम, गमल हे कोन प्रत्येकीं हसल किंवा सलम ह्या कोना बरावर आहेत;

म्हणून गहसलम पंचकोण समकोण आहे.

आणि तो समभुज आहे असें वर दाखविलें आहे.

ह्याकरितां, दिलेल्या वर्तुळा भोंवतीं समभुज आणि समकोण पंचकोण काढला आहे.

सिद्धांत १३. कृत्य.

दिलेल्या समभुज आणि समकोण पंचकोणांत वर्तुळ काढावयाचें.

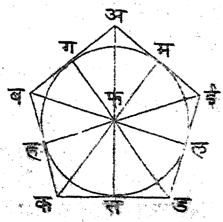
अबकडई दिलेला समभुज आणि समकोण पंचकोण आहे; तर त्यांत वर्तुळ काढावयाचें आहे.

बकड आणि कडई हे दोन कोन कफ आणि डफ रेषांनीं दुभागः (१.९)

आणि ज्या बिंदूंत त्या रेषा मिळतात, त्या फ बिंदू पासून फब, फअ, फई रेषा काढ.

तेव्हां बक, डक बराबर आहे, (प्रतिज्ञा)
आणि बकफ आणि डकफ ह्या दोन त्रिकोणांस कफ साधारण आहे,
म्हणून बक, कफ बाजू डक, कफ बाजूंशीं अनुक्रमें बराबर आहेत;
आणि बकफ कोन डकफ कोना बराबर आहे; (रचना)

म्हणून बफ पाया डफ पाया बराबर आहे, आणि कबफ कोन कडफ कोना बराबर आहे. (१.४)



आणि कडई कोन कडफ कोनाची दुपट आहे,
आणि कडई कोन कबअ कोना बराबर आहे;
आणि कडफ कोन कबफ कोनाबराबर आहे,
म्हणून कबअ कोन कबफ कोनाची दुपट आहे;
म्हणून अबफ कोन कबफ कोना बराबर आहे;
म्हणून अबक कोन बफ रेषेनें दुभागला आहे.

ह्याप्रमाणेंच असें दाखवितां येईल कीं बअई आणि अईड हे दोन कोन, अफ आणि ईफ रेषांनीं दुभागले आहेत.

फ बिंदूपासून अब, बक, कड, डई, ईअ ह्या रेषांवर फग, फह, फस, फल, फम लंब काढ. (१.१२)

तेव्हां फकह कोन फकस कोनाबराबर आहे,
आणि फहक काटकोन फसक काटकोना बराबर आहे;
म्हणून फहक आणि फसक ह्या दोन त्रिकोणांत एकाचे दोन कोन दुसऱ्याच्या दोन कोनांशीं अनुक्रमें बराबर आहेत;
आणि फक बाजू दोन त्रिकोणांस साधारण आहे;
म्हणून फह लंब फस लंबा बराबर आहे. (१.२६)

ह्याच रीतीनें असें दाखवितां येईल कीं फल, फम, फग हे लंब फह अथवा फस ह्या लंबा बराबर आहेत.
म्हणून फग, फह, फस, फल, फम, ह्या पांच रेषा परस्पर बराबर आहेत, आणि फ मध्य धरून ह्यां पैकीं कोणत्याही एका रेषे एवढ्या

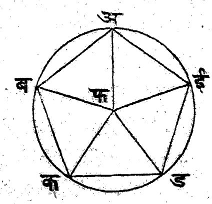
अंतरानें वर्तुळ काढलें असतां, तें दुसऱ्या चार रेघांच्या शेवटांतून जाईल;
आणि तें अब, बक, कड, डई, ईअ रेघांस स्पर्श करील;
कारण, ग, ह, स, ल, म बिंदूंशीं झालेले कोन काटकोन आहेत; (रचना).
आणि व्यासाच्या टोंकांतून त्यांवर लंब काढलेली रेघ वर्तुळास स्पर्श करिते; (३.१६)
म्हणून अब, बक, कड, डई, ईअ ह्या पांच रेघांतून प्रत्येक वर्तुळास स्पर्श करिते.

ह्याकरितां, दिलेल्या समभुज आणि समकोण पंचकोणांत वर्तुळ काढलें आहे.

सिद्धांत १४. कृत्य.

दिलेल्या समभुज आणि समकोण पंचकोणा भोंवतीं वर्तुळ काढावयाचें.

अबकडई दिलेला समभुज आणि समकोण पंचकोण आहे; तर त्या भोंवतीं वर्तुळ काढावयाचें आहे.



बकड आणि कडई कोन कफ आणि डफ रेघांनीं दुभाग; (१.९)
आणि ज्या फ बिंदूंत त्या रेघा मिळतात त्या बिंदूपासून फब, फअ, फई रेघा काढ,

तेव्हां मागील सिद्धांता प्रमाणें कबअ, बअई, अईड हे कोन बफ, अफ, ईफ रेघांनीं दुभागले जातात, असें दाखवितां येईल.
आणि बकड कोन कडई कोना बरोबर आहे,
आणि फकड कोन बकड कोनाचें अर्ध आहे,
आणि फडक कोन कडई कोनाचें अर्ध आहे,
म्हणून फकड कोन फडक कोना बरोबर आहे; (प्र. प्र. ७)
ह्यास्तव फक बाजू फड बाजू बराबर आहे. (१. ६)
ह्याच रीतीनें असें दाखवितां येईल कीं फब, फअ, फई ह्या प्रत्येकीं फक अथवा फड रेघे बराबर आहेत.
म्हणून फअ, फब, फक, फड, फई ह्या पांच रेघा परस्पर बराबर

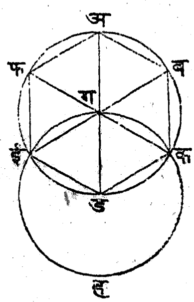
आहेत; आणि **फ** मध्य धरून त्यांपैकीं कोणत्या एका रेषे इतक्या अंतरानें वर्तुळ काढलें असतां, तें दुसऱ्या चार रेषांच्या शेवटांतून जाईल, आणि तें **अबकडई** समभुज आणि समकोण पंचकोणा भोंवतीं होईल.

ह्याकरितां, **दिलेल्या समभुज आणि समकोण पंचकोणा भोंवतीं वर्तुळ काढलें आहे.**

सिद्धांत १५. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुळांत एक समभुज आणि समकोण षट्कोण काढावयाचें.

अबकडईफ दिलेलें वर्तुळ आहे; तर त्यांत एक समभुज आणि समकोण षट्कोण काढावयाचा आहे.



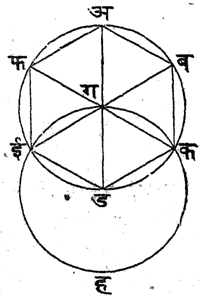
अबकडईफ वर्तुळाचा **ग** मध्य काढ, (३.१)
आणि **अगड** व्यास काढ;
आणि **ड** मध्य धरून **डग** अंतरानें **ईगकह** वर्तुळ काढ;
ईग, **कग** सांध, आणि त्यांस **ब** आणि **फ** बिंदू पर्यंत वाढीव;
आणि **अब**, **बक**, **कड**, **डई**, **ईफ**, **फअ** सांध.
म्हणजे **अबकडईफ** समभुज आणि समकोण षट्कोण होईल.

कारण, **अबकडईफ** वर्तुळाचा **ग** मध्य आहे म्हणून **गई**, **गड** बराबर आहे;
आणि **ईगकह** वर्तुळाचा **ड** मध्य आहे, म्हणून **डई**, **डग** बराबर आहे;
ह्यास्तव **गई**, **डई** बराबर आहे, (प्र.प्र. १)
आणि **ईगड** त्रिकोण समभुज आहे;
म्हणून **ईगड**, **गडई**, **डईग** हे तीन कोन परस्पर बराबर आहेत. (१.५, कुर.)

परंतु त्रिकोणाचे तीन कोन मिळून दोन काटकोनां बरोबर असतात. (१.३२)

ह्यास्तव ईगड कोन दोन काटकोनांचा तिसरा भाग आहे.

ह्याच रीतीनें असें दाखवितां येईल कीं डगक कोन दोन काटकोनांचा तिसरा भाग आहे.



आणि गक रेघ ईब रेघेशीं जे दोन ईगक आणि कगब कोन करिते, ते मिळून दोन काटकोनां बरोबर आहेत, (१.१३)
म्हणून शेष कगब कोन दोन काटकोनांचा तिसरा भाग आहे;
म्हणून ईगड, डगक, कगब हे तीन कोन परस्पर बरोबर आहेत.
आणि ह्यांसमोरील बगअ, अगफ, फगई कोनही ह्यांबरोबर असून, परस्पर बरोबर आहेत. (१.१५)
म्हणून ईगड, डगक, कगब, बगअ, अगफ, फगई हे सहा कोन परस्पर बरोबर आहेत.
परंतु समान कोन समान कौंसांवर असतात; (३.२६)
म्हणून अब, बक, कड, डई, ईफ, फअ हे सहा कौंस परस्पर बराबर आहेत.
आणि समान कौंसांचीं टोंकें सांधणाऱ्या रेघा परस्पर बरावर असतात; (३.२९)
म्हणून त्या सहा रेघा परस्पर बरावर आहेत, आणि अर्थातच त्यांनीं झालेला षट्कोण समभुज आहे.

आणि तो समकोणही आहे.
कारण, अफ कौंस ईड कौंसा बराबर आहे;
ह्या प्रत्येकास अबकड कौंस मिळीव,
म्हणून सगळा फअबकड कौंस, सगळ्या अबकडई कौंसा बराबर आहे;
आणि फईड कोन फअबकड कौंसावर आहे,
आणि अफई कोन अबकडई कौंसावर आहे,

म्हणून फईड कोन अफई कोना बराबर आहे. (३.२७)

ह्याच रीतीनें असें दाखवितां येईल कीं अबकडईफ षट्कोणाचे दुसरे कोन प्रत्येकीं अफई अथवा फईड कोना बराबर आहेत;
म्हणून तो षट्कोण समकोण आहे.
आणि तो समभुज आहे असें वर दाखविलें आहे;
आणि तो अबकडईफ वर्तुळांत काढला आहे.

ह्याकरितां, दिलेल्या वर्तुळांत समभुज आणि समकोण षट्कोण काढला आहे.

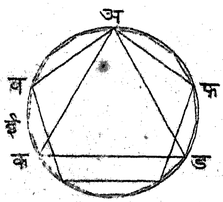
कुरलरी. ह्यावरून हें उघड आहे कीं ह्या षट्कोणाची प्रत्येक बाजू वर्तुळाच्या अर्धव्यासा बराबर आहे.

असेंच, अ, ब, क, ड, ई, फ ह्या बिंदूंतून वर्तुळास स्पर्श करणाऱ्या रेघा काढल्या, तर त्यांनीं वर्तुळा भोंवतीं पंचकोणाप्रमाणेंच समभुज आणि समकोण षट्कोण होईल; आणि पंचकोणाप्रमाणेंच, समभुज आणि समकोण षट्कोणांत आणि षट्कोणा भोंवतीं वर्तुळ काढतां येईल.

सिद्धांत १६. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुळांत समभुज आणि समकोण पंचदशकोण काढावयाचें.

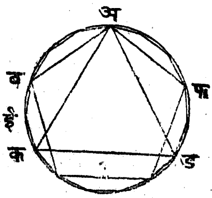
अबकड दिलेलें वर्तुळ आहे; त्यांत समभुज आणि समकोण पंचदशकोण काढावयाचा आहे.



असें समज कीं वर्तुळांत काढलेल्या समभुज त्रिकोणाची एक बाजू अक आहे; (४.२)
आणि त्याच वर्तुळांत काढलेल्या समभुज आणि समकोण पंचकोणाची एक बाजू अब आहे, (४.११)

तेव्हां अबकडफ ह्या सर्व परिघाचे पंधरा समान भाग करावयाचे आहेत, आणि अबक कौंस सर्व परिघाचा तिसरा भाग आहे, म्हणून

त्यांत पंधरा समान भागां पैकीं पांच आहेत; आणि अब कौंस सर्व परिघाचा पांचवा भाग आहे, म्हणून त्यांत पंधरा समान भागां पैकीं तीन आहेत; म्हणून अक, अब ह्या दोन कौंसांचें अंतर जो बक कौंस त्यांत पंधरा समान भागां-पैकीं दोनच आहेत.



बक कौंस ई बिंदूंत दुभाग; (३.३०)
म्हणून बई, ईक ह्या कौंसां पैकीं प्रत्येक अबकडफ ह्या सर्व परिघाचा पंधरावा भाग आहे.

ह्याकरितां, बई, ईक सांधून, ह्यां बराबरच्या रेघा सर्व वर्तुळांत चोहोंकडे ठेविल्या, (४.१

तर त्यांत समभुज आणि समकोण पंचदशकोण निघेल.

आणि, पंचकोणाप्रमाणेंच, वर्तुळांत पंचदशकोण काढल्यानें परिघांत जे विभागबिंदु येतात त्यांपासून वर्तुळास स्पर्श करणाऱ्या रेघा काढल्या, तर त्याभोंवतीं समभुज आणि समकोण पंचदशकोण निघेल; आणि पंचकोणाप्रमाणेंच, दिलेल्या समभुज आणि समकोण पंचदशकोणांत आणि पंचदशकोणा भोंवतीं वर्तुळ काढतां येईल.

युक्लिडकृत भूमितीवर टिपणें.

पहिलें पुस्तक.

व्याख्या. पहिल्या सात व्याख्यांवर कांहीं ग्रंथकारांनीं बरीच चर्चा केली आहे. परंतु त्या चर्चेंत न शिरतां, एथें इतकें सांगणें पुरें आहे कीं बिंदु, रेघ, आणि पृष्ठभाग किंवा पातळी ह्या शब्दांची कल्पना ज्यांस नाहीं त्यांस ती त्या शब्दांच्या व्याख्यांनीं किंवा लक्षणांनीं करून देतां येत नाहीं. ह्या शब्दांच्या पूर्वीं दिलेल्या व्याख्या अर्थसूचक किंवा अर्थनियामक समजाव्या. म्हणजे बिंदूला आकार आहे असें मानूं नये, तर स्थितिमात्र आहे असें मानावें; रेघेस रुंदी किंवा जाडी आहे असें मानूं नये, तर लांबी मात्र आहे असें मानावें; आणि पृष्ठभागास किंवा पातळीस जाडी आहे असें मानूं नये, तर लांबी आणि रुंदी मात्र आहे असें मानावें.

आठव्या व्याख्येंत दोन वक्ररेषा, किंवा एक सरळ रेघ आणि एक वक्र रेघ मिळाल्या असतां जो कोन होतो तोही येतो; परंतु ही व्याख्या फारशी उपयोगी नाहीं, कारण ह्या ग्रंथांत सरळ रेघांनीं झालेल्या कोनांचाच विचार केला आहे. पातळींतील सरलरेषाकोणाची व्याख्या उपयोगी आहे; विद्यार्थ्यानें एथें इतकें ध्यानांत ठेवावें कीं ज्या रेघांनीं कोन होतो त्या, कोनाच्या बिंदूपासून कितीही वाढविल्या, तरी त्या कोनांत फेर होत नाहीं.

कितीएक ग्रंथकार, समभुज त्रिकोण, चौरस, इत्यादिकांच्या व्याख्यांवर दोष देतात; कारण त्या व्याख्यांत पदार्थाच्या स्वरूपाचें उपपादन केलें नाहीं, तर तें घेतलें आहे. त्यांच्या मतें त्या व्याख्या ह्याप्रमाणें असाव्या; जर त्रिकोण तीन समान बाजूंचा असला, तर त्यास समभुज त्रिकोण म्हणावें, इ०.

खेरीज, किती एक व्याख्या योग्य ठिकाणीं दिल्या नाहींत. उदाहरणार्थ, काटकोनत्रिकोण आणि विशालकोण त्रिकोण ह्यांच्या व्याख्या

पाहा. १.१७ पर्यंत असें सांगितलें नाहीं कीं त्रिकोणांत एक काटकोन आणि एक विशाळ कोन असे कोन एकदम असत नाहींत, म्हणून तो एकच वेळीं काटकोनत्रिकोण आणि विशालकोणत्रिकोण होत नाहीं. आणि ११ वें प्रत्यक्ष प्रमाण वाचण्यापूर्वीं अशी कल्पना करतां येईल कीं एकच कोन एका काटकोनाहून अधिक, आणि दुसऱ्या काटकोनाहून कमी, म्हणजे एकच वेळीं विशाळ आणि लघु आहे.

चौरसाच्या व्याख्येंत गरजे पेक्षां अधिक घेतलें आहे. कारण, चतुष्कोणाकृतीच्या सर्व बाजू बराबर असून एक कोन काटकोन आहे, तर सर्व कोन काटकोन असतात; किंवा चतुष्कोणाकृतीचे सर्व कोन बराबर आहेत, तर ते सर्व काटकोन असतात असें सिद्ध करून दाखवितां येतें.

गृहीत गोष्टी. गृहीत गोष्टींनीं असें कळतें, कीं दोन बिंदूंच्या मध्यें रेघ काढतां येते, रेघ हव्या त्या लांबीपर्यंत वाढवितां येते, आणि दिलेल्या मध्यापासून दिलेलें अंतर त्रिज्या धरून वर्तुळ काढतां येतें, ह्या गोष्टी आम्हांस करतां येतात असें घेतलें आहे. कोणी असें म्हणतात कीं गृहीत गोष्टी म्हणजे आखणी आणि कर्कटक (कंपास) ह्यांचा उपयोग करणें होय. परंतु हें ध्यानांत ठेवलें पाहिजे कीं घेतलेल्या आखणीवर भाग पाडलेले नाहींत आणि अर्थातच तिनें अपेक्षित अंतरें मोजतां येत नाहींत; आणि दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या अंतरानें वर्तुळ काढण्यापेक्षां कर्कटकाचें दुसरें कांहीं काम नाहीं.

प्रत्यक्ष प्रमाणें. मूळ ग्रीक ग्रंथांत प्रत्यक्ष प्रमाणांस सामान्य विचार म्हटलें आहे. युक्लिडकृत पुस्तकांत कधीं कधीं चवथ्या प्रत्यक्ष प्रमाणावर हवाला दिला आहे, परंतु वास्तविक पाहतां ह्या प्रत्यक्ष प्रमाणांत जें काय आहे त्यापेक्षां अधिकाची गरज असते. युक्लिड म्हणतो, कीं जर अ आणि ब असम आहेत, आणि क आणि ड सम आहेत, तर अ आणि क ह्यांची बेरीज, ब आणि ड ह्यांच्या बेरजे बराबर असत नाहीं. आणि युक्लिडास जें काय हवें असतें तें ह्याहून अधिक आहे; म्हणजे जर अ, ब हून अधिक आहे, आणि क आणि ड सम आहेत, तर अ आणि क ह्यांची बेरीज, ब आणि ड ह्यांच्या बेरजे पेक्षां अधिक आहे. १.१७ मध्यें अशा प्रत्यक्ष प्रमाणाची गरज आहे. पांचव्या प्रत्यक्ष प्रमाणांनही असेंच व्यंग आहे.

आठव्या प्रत्यक्ष प्रमाणांत " म्हणजे एकच जागा व्यापून राहतात " हे शब्द मूळ ग्रीक ग्रंथांत नाहींत. हे शब्द दोषार्ह आहेत, कारण रेषा आणि कोन ह्या परिमाणांसही हें प्रत्यक्ष प्रमाण लावतां येईल, परंतु हीं परिमाणें जागा व्यापतात असें म्हणतां येत नाहीं.

१.१४ पूर्वी अकरावें प्रत्यक्ष प्रमाण लागत नाहीं, आणि १.२९ पूर्वी बारावें प्रत्यक्ष प्रमाण लागत नाहीं. म्हणून ह्या प्रत्यक्ष प्रमाणांविषयीं जें काय सांगणें आहे तें त्या त्या सिद्धांतांत सांगूं.

पहिल्या पुस्तकांत त्रिकोणांचे आणि समांतरभुज चौकोनांचे गुण मुख्यत्वें सांगितले आहेत.

१.१. ह्याची आकृति पाहिल्यानें हें सहज ध्यानांत येईल कीं दिलेल्या रेषेवर वरच्या आणि खालच्या अंगास दोन समभुज त्रिकोण काढतां येतात.

१.२. ह्या कृत्यांत आकृतीनें आठ रेषा निघतात. कारण, दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या रेषेच्या प्रत्येक टोंका पर्यंत दोन रेषा काढून प्रत्येकीवर दोन अंगांस दोन समभुज त्रिकोण काढतां येतात, आणि प्रत्येक समभुज त्रिकोणाच्या वाढवावयाच्या बाजू प्रथम वर्तुळाच्या दुसऱ्या अंगास वाढवून दुसरें वर्तुळ धाकट्या त्रिज्येनें काढतां येतें.

परंतु जेव्हां दिलेला बिंदु रेषेंत किंवा वाढविलेल्या रेषेंत असतो, तेव्हां आठां पैकीं चार रेषा दुसऱ्या चार रेषांशीं मिळतात. कारण १.३२ नें असें करून येईल कीं सर्व समभुज त्रिकोणांचे कोन समान असतात.

ह्या वेगवेगळ्या रेषा काढणें सुलभ आहे; म्हणून त्या विद्यार्थ्यां कडून काढवाव्या, म्हणजे त्या त्यांस प्रश्नादाखल उपयोगीं पडतील.

१.५. " फक सांध " असें म्हणण्याचा चमत्कारिक प्रघात पडून गेला आहे. पण ह्याचा अर्थ " फक रेष काढ " किंवा " फक रेषेनें फ बिंदु क बिंदूशीं सांध, " असा आहे.

सिद्धांता पासून लागलेंच जें अनुमान निघतें त्यास कुरलरी म्हणतात. मागील पुस्तकांत दिलेल्या बहुतेक कुरलरी मूळ ग्रंथांत नाहींत, मागून जोडलेल्या आहेत.

कोणी १.५ चें उपपादन दुसऱ्याच रीतीनें करितात. तें असें,—

अबक समद्विभुज त्रिकोण उचलून, पुनः असा ठेविला कीं **अक**च्या पहिल्या स्थानीं **अब** पडेल, आणि **अब**च्या पहिल्या स्थानीं **अक** पडेल. **मग** १.४ मध्यें सांगितलेल्या रीतीप्रमाणें असें दाखवितां येईल कीं **अबक** कोन **अकब** कोना बराबर आहे.

१.५ च्या पहिल्या भागाची उलट १.६ आहे. दोन सिद्धांतांत जेव्हां एकाची प्रतिज्ञा दुसऱ्याचें अनुमान असते, आणि अनुमान दुसऱ्याची प्रतिज्ञा असतें, तेव्हां पहिला सिद्धांत दुसऱ्याची उलट आहे असें म्हणतात. जसें, १.५ ची प्रतिज्ञा बाजूंचें साम्य आहे; आणि प्रथम अनुमान कोनांचें साम्य आहे; १.६ ची प्रतिज्ञा कोनांचें साम्य आहे, आणि अनुमान बाजूंचें साम्य आहे. जेव्हां सिद्धांतास एकीहून अधिक प्रतिज्ञा, किंवा एकाहून अधिक अनुमानें असतात, तेव्हां त्याशीं उलट सिद्धांत एकाहून अधिक असतात. उदाहरणार्थ, १.५ शीं दुसरा उलट सिद्धांत असा होईल. जर त्रिकोणाच्या दोन बाजू वाढवून, त्यांनीं पायाशीं होणारे कोन बराबर आहेत, तर त्या दोन बाजू बराबर असतात. हा सिद्धांत खरा आहे, आणि विद्यार्थ्यास उदाहरणा दाखल उपयोगीं पडेल.

खऱ्या सिद्धांताची उलट नेहमीं खरीच असते असें नाहीं. तथापि भूमितींतील बहुत सिद्धांत उलटेही खरे आहेत, असें विद्यार्थ्याच्या लक्ष्यांत येईल.

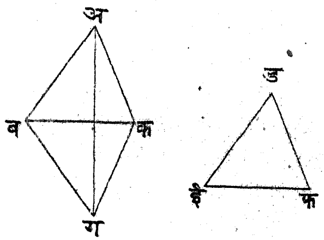
व्यस्त उपपादन करण्याचें १.६ हें उदाहरण आहे. ज्या उपपादनांत विवक्षित अनुमान खोटें मानल्यानें दिलेल्या प्रतिज्ञेशीं विरोध येतो असें दाखविलें असतें तें उपपादन **व्यस्त** होय. व्यस्त उपपादनांत, सिद्धांत कां खरा आहे असें न दाखवितां, तो खरा आहे इतकें मात्र दाखविलें असतें, म्हणून व्यस्त उपपादना पेक्षां सम उपपादन योग्यतेनें अधिक मानतात. मागील सिद्धांताची उलट सिद्ध करतांना मुख्यत्वें व्यस्त उपपादन येतें, असें मागील ग्रंथ पाहिल्यानें सहज लक्षांत येईल. (१.१४,१९,२५, ४० पाहा)

१.६ ची गरज २.४ पूर्वीं लागत नाहीं, म्हणून तो पुढें दिल्यास त्याचें उपपादन दुसऱ्या रीतीनें करतां येतें. उदाहरणार्थ,

तो १.१८ नंतर दिला तर त्याचें उपपादन असें करितां येईल,—**अबक** कोन **अकब** कोना बराबर आहे, तर **अब**, **अक** बराबर होईल; कारण, जर त्या बराबर नसतील तर **अब**, **अक** हून मोठी मान. तेव्हां **अकब** कोन **अबक** कोनाहून मोठा आहे (१. १८); परंतु ही गोष्ट प्रतिज्ञाविरुद्ध आहे. अथवा १.६ हा १.२६ नंतर दिला, तर **बअक** कोन दुभागणारी रेघ पायास **ड** मध्यें मिळीव. तेव्हां **अबड** आणि **अकड** हे दोन त्रिकोण सर्वांशीं सारखे आहेत (१.२६).

१.७ हा १.८ च्या उपपादनांत मात्र येतो. म्हणून १.८ चें उपपादन पुढील प्रमाणें केल्यास, १.७ गाळतां येईल.

अबक, **डईफ** ह्या दोन त्रिकोणांत **अब**, **अक** बाजू प्रत्येकीं **डई**, **डफ** बाजूं बराबर आहेत, आणि **बक** पाया **ईफ** पाया बराबर आहे; तर **बअक** कोन **ईडफ** कोना बराबर होईल.



कारण, **डईफ** त्रिकोण **अबक** त्रिकोणास असा लावला कीं त्यांचे पाये एकच होतील; आणि समान बाजू एकाच बिंदूंत मिळून, त्यांचे शिरकोन पायाचे उलट अंगास पडतील. अशा रीतीनें लावलेला **डईफ** त्रिकोण, **बकग** आहे, आणि त्याचा **ड** बिंदु **ग** आहे असें मान, आणि **अग** सांध. आतां प्रतिज्ञेप्रमाणें **बअ**, **बग** बराबर आहे म्हणून **बअग** कोन १.५ प्रमाणें **बगअ** कोना बराबर आहे. आणि त्याच प्रमाणें **कअग** कोन **कगअ** कोना बराबर आहे. म्हणून सगळा **बअक** कोन सगळ्या **बगक** कोनाबराबर, म्हणजे **ईडफ** कोना बराबर आहे.

जेव्हां अग रेघ ब अथवा क बिंदूंतून जाईल, अथवा ती, बक रेघे पलीकडे पडेल, तेव्हांही वरील रीतीनें सिद्धता करतां येईल.

१.८. ह्या सिद्धांतांत दोनही त्रिकोण सर्वांशीं बराबर असतात. पण युक्लिड पायां समोरील कोन बराबर असतात इतकें मात्र दाखवितो, आणि जेव्हां अधिक अनुमानाची गरज लागते, तेव्हां तें १.४ च्या योगें सिद्ध करतो.

१.९. ह्यांत डईफ समभुज त्रिकोण अ कोनापासून दूर आणि उलट बाजूस आहे असें समजलें पाहिजे; कारण, जर तो त्रिकोण अ कोनाच्याच बाजूस काढला, तर जेव्हां त्याचा शिरकोन फ, अ कोनांतच मिळून जातो तेव्हां ही रचना व्यर्थ होईल.

१.११. ह्यांत दिलेली कुरलरी सिमसनाची आहे; आणि ती शंकेसही पात्र आहे. कारण, बई लंब कसा काढावा हें आपणास माहीत नाहीं. १.११ प्रमाणें काढूं लागल्यास प्रथम अब वाढविली पाहिजे, आणि ती वाढविण्या पूर्वी रेघ वाढण्याचा एकच मार्ग आहे असें घेतलें पाहिजे. कारण, नाहीं तर एका ब बिंदू पासून अब वर एकच लंब निघतो हें आपणास समजणार नाहीं; आणि ह्या रीतीनें ज्या गोष्टीचें उपपादन करावयाचें आहे तीच गोष्ट घेऊन चालल्या सारखी होते.

सिमसनाची ही वरील कुरलरी १.१३ नंतर आल्यास, तिचें उपपादन असें करतां येईल. ही गोष्ट जर शक्य असेल, तर अबक आणि अबड ह्या रेघांचा अब हा एकच साधारण भाग आहे असें मान. ब पासून बई रेघ काढ. तेव्हां अबई आणि ईबक हे दोन कोन मिळून १.१३ प्रमाणें दोन काटकोनां बराबर आहेत, आणि अबई आणि ईबड हेही कोन मिळून, १.१३ प्रमाणें दोन काटकोनां बराबर आहेत. म्हणून अबई आणि ईबक हे दोन कोन, अबई आणि ईबड ह्या दोन कोनां बराबर आहेत. म्हणून ईबक कोन ईबड कोनाबराबर आहे व हें होणें अशक्य आहे.

परंतु जर भूमितींत, दोन रेघांस साधारण एक भाग असतो, किंवा नसतो, ह्या गोष्टीचा विचारच करणें असेल, तर तो सिमसनानें ज्या जागीं केला आहे त्या पूर्वीच केला पाहिजे. उदाहरणार्थ, १.५ च्या आकृतींत जर दोन रेघांस साधारण एकच भाग अब असून, ब मध्यें

त्या वेगळ्या होत असल्या, तर ह्या वाढविलेल्या रेषांनीं बकच्या दुसऱ्या अंगास दोन वेगळाले कोन होतील, आणि त्यांतील प्रत्येक **बकग** कोना बराबर होईल. १.१ मध्यें देखील अक आणि बक रेषांस त्यांच्या क छेदनबिंदूशीं साधारण भाग नाहीं असें मानणें गर्भित आहे.

खेरीज, ही कुरलरी ११.१ पर्यंत मुळींच लागत नाहीं. ही कुरलरी काढून टाकून १० वें प्रत्यक्ष प्रमाण पुढील प्रमाणें वाढविल्यानें हिचें काम होईल; "आणि जर दोन रेषा दोन बिंदूंत एकत्र होतात, तर त्या, त्या दोन बिंदूंच्या मध्यें आणि त्या दोन बिंदूंपलीकडे एकत्र झाल्याच पाहिजेत."

१.१२. ह्यांत दिलेली रेष काढलेल्या वर्तुळास मिळावी म्हणून ती **अमर्याद** म्हटली आहे.

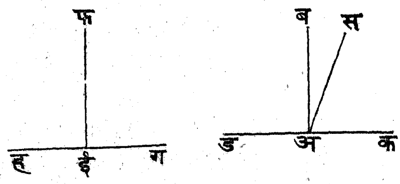
१.१४. ह्यांत प्रथम ११ व्या प्रत्यक्ष प्रमाणाची गरज लागते. कारण, उपपादनांत **अबक** आणि **अबई** हे कोन दोन काटकोनां बराबर आहेत, आणि **अबक** आणि **अबड** हेही कोन दोन काटकोनां बराबर आहेत; आणि पहिले दोन काटकोन ११ व्या प्रत्यक्ष प्रमाणानें दुसऱ्या दोन काटकोनां बराबर आहेत.

युक्लिडकृत भूमितीच्या नवीन कांहीं आवृत्तींत पहिलें प्रत्यक्ष प्रमाण देतात, परंतु त्यानें उपपादन पुरें होत नाहीं. असाच दोष १.१५ आणि १.२४ ह्यांतील उपपादनांत आहे. ह्या सिद्धांतांत विद्यार्थ्यांनीं घोटाळ्यांत पडूं नये म्हणून मागील संबंध मुळींच दाखविला नाहीं; परंतु अशा स्थलीं जेव्हां मागील संबंध दाखविला आहे, तेव्हां १ लें आणि ११ वें प्रत्यक्ष प्रमाण हीं दोन्ही दिलीं आहेत.

११ व्या प्रत्यक्ष प्रमाणाचें उपपादन पुढील रीतीनें केल्यास, युक्लिडाच्या भूमिति ग्रंथास कांहीं दोष येईलसें वाटत नाहीं.

डअक रेषेस **अ** बिंदूशीं **अब** लंब आहे, आणि **हईग** रेषेस **ई** बिंदूशीं **ईफ** लंब आहे, तर **बअक** कोन **फईग** कोना बराबर होईल.

अक कांहीं एक लांबी घेऊन, ती बराबर **अड**, **ईह**, **ईग** रेषा कर. आतां **हईग** रेष **डअक** रेषेवर अशी आणून ठेव कीं **ह**, **ड** वर



येईल, आणि हग, डक वर येईल, आणि डकच्या एकाच अंगास ब आणि फ येतील; तेव्हां ग, क शीं मिळेल आणि ई, अ शीं मिळेल. अर्थांतच ईफ, अब शीं मिळेल; कारण जर त्या मिळणार नाहींत, तर शक्य असल्यास त्या वेगळ्या आहेत, म्हणजे ईफ चें स्थान अस आहे, असें मान. तेव्हां डअस कोन, हईफ कोना बरोबर आहे, आणि कअस कोन गईफ कोना बरोबर आहे; परंतु प्रतिज्ञेप्रमाणें हईफ आणि गईफ हे दोन कोन बराबर आहेत; म्हणून डअस आणि कअस हे कोनही बराबर आहेत. परंतु प्रतिज्ञेवरूनच डअब आणि बअक हेही दोन कोन बरोबर आहेत, आणि कअब कोन कअस कोनाहून मोठा आहे. म्हणून डअब कोन कअस कोनाहून मोठा आहे. अर्थांतच डअस कोन कअस कोनाहून फारच मोठा आहे. परंतु डअस कोन कअस कोना बराबर आहे असें वरती दाखविलें आहे, व हें होणें अशक्य आहे. म्हणून ईफ, अब शीं मिळालीच पाहिजे; आणि ह्याकरितां फईग कोन, बअक कोनाशीं मिळतो व त्या बराबर आहे.

१.१८,१.१९. ह्या दोघांतील पहिल्याचें उपपादन सम आहे, आणि दुसऱ्याचें व्यस्त आहे; समव्यस्त उपपादनांविषयीं पूर्वीं एके वेळीं लिहिलेंच आहे. (१.५,१.६ ह्यांवरील टिपण पाहा.)

१.२०. हा सिद्धांत इतका उघड आहे कीं उपपादनाची गरज मुळींच नाहीं असें किती एक युक्लिडकृत भूमितीवरील टीकाकार म्हणतात. परंतु ह्या, २१ व्या, आणि दुसऱ्या अशाच कांहीं उघड सिद्धांतांवरील शंकेचें खरें समाधान इतकेंच आहे कीं जर ह्या सिद्धांतांचें उपपादन

करून दाखविलें नाहीं, तर प्रत्यक्ष प्रमाणांची संख्या वाढेल आणि ती गरज नसतां वाढविणें बराबर नाहीं.

१.२२. ह्या सिद्धांताच्या रचनेंत जीं दोन वर्तुळें काढावीं लागतात, तीं एकमेकास कापतात असें युक्लिडानें सिद्ध करून दाखविलें नाहीं, हा दोष कित्येक ग्रंथकार त्यास देतात; परंतु ही गोष्ट त्यांतील उपपादनावरूनच, म्हणजे डफ, फग, गह ह्यांपैकीं कोणत्याही दोन रेघा तिसरी पेक्षां अधिक असाव्या ह्या लेखावरूनच, उघड होते. कारण, फ मध्यापासून फड अंतरानें काढलेलें वर्तुळ, फह पेक्षां फड मोठी असतां, फह स मिळणार नाहीं असें म्हणणारा विद्यार्थी क्वचित्च सांपडेल. असेंच, ग मध्यापासून गह अंतरानें काढलेलें वर्तुळ, डग स मिळेलच; आणि हीं वर्तुळें एकमेकांस मिळतीलच; कारण, फड आणि गह मिळून फग पेक्षां अधिक आहेत.

ब आणि क मिळून अ पेक्षां अधिक आहेत असें म्हटल्यानेंच ग मध्यापासून काढलेलें वर्तुळ फ मध्यापासून काढलेल्या वर्तुळांत सगळें पडणार नाहीं, म्हणजे पहिलें दुसऱ्यास कापील हें उघड होतें. आणि अ आणि ब, क पेक्षां अधिक, आणि अ आणि क, ब पेक्षां अधिक आहेत असें म्हटल्यानेंच तीं वर्तुळें एकमेकांस कापतात असें स्पष्ट होतें.

१.२४. ह्याच्या रचनेंत 'डई दुसऱ्या बाजू पेक्षां मोठी नाहीं' हें मूलग्रंथांत नाहीं, सिमसनानें जोडलें आहे; आणि हें न जोडल्यानें रचनेंत तीन प्रकार होतात, कारण फ बिंदु ईग रेघेंत, रेघेवर, किंवा रेघेखालीं पडेल. कोणी असें म्हणेल कीं ही गोष्ट जरी सिमसनानें जोडली तरी त्या गोष्टीचें उपपादन केलेंच पाहिजे. ह्या गोष्टीचें उपपादन असें करितां येतें,—डफ आणि ईग ह्यांचा छेदनबिंदु ह आहे असें मान. तेव्हां १.१६ नें डहग कोन, डईग कोना पेक्षां मोठा आहे; व १.१९ नें डईग कोन, डगई कोना पेक्षां मोठा नाहीं; म्हणून डहग कोन डगह कोना पेक्षां मोठा आहे; म्हणून १.२० नें डह, डग पेक्षां मोठी नाहीं. म्हणून डह, डफ पेक्षां लहान आहे.

सिमसनानें जोडलेली गोष्ट काढून टाकिली, तर रचनेंत दुसरे दोन प्रकार होतात. जर फ बिंदु ईग रेघेंत पडतो, तर उघड आहे कीं ईफ, ईग पेक्षां लहान आहे. जर फ बिंदु ईग रेघेवरतीं

पडतो, तर १.२१ प्रमाणें डफ आणि ईफ ह्यांची बेरीज, डग आणि ईग ह्यांच्या बेरजेहून अधिक आहे; म्हणून ईफ, ईग पेक्षां लहान आहे.

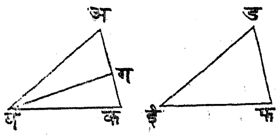
१.२६. १.३२ सिद्धांताच्या योगें हें ध्यानांत येईल कीं, जर दोन त्रिकोणांत एकाचे दोन कोन प्रत्येकीं दुसऱ्याच्या दोन कोनां बराबर आहेत, तर त्यांचे तिसरे कोनही बराबर असतात. म्हणून १. २६ चे दोनही प्रकार एकाच प्रतिज्ञेनें दाखवितां येतात. **जर दोन त्रिकोणांत एकाचे सर्व कोन प्रत्येकीं दुसऱ्याच्या सर्व कोनां बराबर आहेत, आणि एकांतील कोणत्याही कोना समोरील बाजू, त्या कोनाशीं समान दुसऱ्यांतील कोना समोरील बाजू बराबर आहे, तर ते दोन त्रिकोण सर्वांशीं बराबर असतात.**

पहिल्या पुस्तकांतील पहिले सवीस सिद्धांत मिळून एक वेगळा भागच होतो. ह्या भागांतील मुख्य सिद्धांत ४,८, आणि २६ हे आहेत. ह्यांतील प्रत्येक सिद्धांतांत असें दाखविलें आहे कीं जे दोन त्रिकोण तीन गोष्टींनीं जमतात, ते सर्वांशीं जमतात. भूमितींत सांगितलेल्या प्रकारां खेरीज दुसरे दोन विद्यार्थ्यांच्या लक्षांत सहज येण्याजोगे आहेत. (१) जेव्हां दोन त्रिकोणांत एकाचे तीन कोन प्रत्येकीं दुसऱ्याच्या तीन कोनां बराबर असतात; (२) जेव्हां दोन त्रिकोणांत एकाच्या दोन बाजू प्रत्येकीं दुसऱ्याच्या दोन बाजू बराबर असून, एकाच्या एक बाजू समोरील कोन, दुसऱ्याच्या त्या बाजू बराबरच्या बाजू समोरील कोना बराबर आहे. १.२९ शिकल्यावर पहिल्या प्रकारा विषयीं विद्यार्थ्यास असें सहज कळून येईल कीं ते दोन त्रिकोण बराबर असतातच असें नाहीं. दुसऱ्या प्रकारांतही ते त्रिकोण बराबर असतातच असें नाहीं; उदाहरणार्थ १.११ च्या आकृतींत फब रेघ काढली आहे असें समज; तेव्हां फबई आणि फबड ह्या दोन त्रिकोणांत, फब बाजू, आणि फबक कोन दोघांस साधारण आहेत, आणि फई बाजू, फड बाजू बराबर आहे, परंतु ते दोन सर्वांशीं बराबर नाहींत. तथापि कांहीं स्थलीं ते त्रिकोण सर्वांशीं बराबर असतात असें पुढील सिद्धांतावरून लक्षांत येईल.

जर दोन त्रिकोणांत एकाच्या दोन बाजू प्रत्येकीं दुसऱ्याच्या दोन बाजू बराबर आहेत, आणि समान बाजूंच्या एका जोडा स-

मोरील कोन बराबर आहेत, तर समान बाजूंच्या दुसऱ्या जोडा समोरील दोन कोन जेव्हां लघु किंवा दोनही विशाळ, किंवा दोहों कोनांपैकीं एक काटकोन असतो, तेव्हां ते दोन त्रिकोण सर्वांशीं बराबर असतात.

अबक आणि डईफ हे दोन त्रिकोण आहेत; आणि अब, डई बराबर आहे, आणि बक, ईफ बराबर आहे, आणि अ कोन ड कोना बराबर आहे.

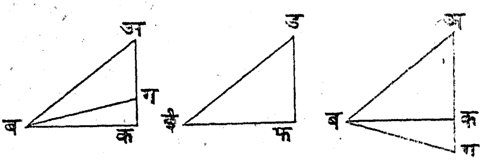


प्रथम क आणि फ हे कोन लघु आहेत असें समज.

जर ब कोन ई कोना बराबर आहे, तर १.४ प्रमाणें अबक त्रिकोण डईफ त्रिकोणाशीं सर्वांशीं बराबर आहे. जर ब कोन ई कोना बराबर नाहीं, तर एक दुसऱ्या पेक्षां मोठा असला पाहिजे; ब कोन ई कोनापेक्षां मोठा आहे असें समज, आणि अबग कोन ई कोना बराबर कर. तेव्हां १.२६ प्रमाणें अबग आणि डईफ हे दोन त्रिकोण सर्वांशीं बराबर आहेत; म्हणून बग, ईफ बराबर, आणि बगअ कोन, ईफड कोना बराबर आहे. परंतु ईफड कोन प्रतिज्ञेनें लघु आहे; म्हणून बगअ कोनही लघु आहे. म्हणून १.१३ नें बगक कोन विशाळ आहे. परंतु बग, ईफ बराबर आहे असें दाखविलें आहे, आणि प्रतिज्ञेनें ईफ, बक बराबर आहे; म्हणून बग, बक बराबर आहे. म्हणून १.५ नें बगक कोन, बकग कोना बराबर आहे; आणि बकग कोन प्रतिज्ञेनें लघु आहे; म्हणून बगक कोन लघु आहे. परंतु बगक विशाळ कोन आहे असें दाखविलें आहे, आणि हें होणें अशक्य आहे. म्हणून अबक आणि डईफ हे कोन बराबर नाहींत असें नाहीं, म्हणजे ते बराबर आहेत. म्हणून ते दोन त्रिकोण सर्वांशीं १.४ नें बराबर आहेत.

दुसऱ्यानें असें समज कीं क आणि फ हे दोनही विशाळ कोन आहेत. ह्या प्रकाराचें उपपादन वरील प्रमाणेंच आहे.

शेवटीं ह्या दोहोंपैकीं क काटकोन आहे असें समज. जर ब कोन ई कोना बराबर नाहीं, तर अबग कोन ई कोना बराबर कर.



तेव्हां वरील प्रमाणेंच असें दाखवितां येईल कीं बग, बक बरोबर आहे; आणि ह्यामुळें बगक कोन, बकग कोना बरोबर आहे, म्हणजे काटकोन आहे. म्हणून बगक त्रिकोणाचे दोन कोन दोन काटकोनां बरोबर आहेत; पण हें होणें १.१७ नें अशक्य आहे. म्हणून अबक आणि डईफ हे कोन बराबर नाहींत असें नाहीं, म्हणजे ते बराबर आहेत. म्हणून १.४ नें अबक आणि डईफ हे त्रिकोण सर्वांशीं बराबर आहेत.

जर अ आणि ड हे दोनही काटकोन आहेत, किंवा दोनही विशाळ कोन आहेत, तर १.१७ नें क आणि फ हे दोनही लघु कोनच असले पाहिजेत. जर अब, बक पेक्षां कमी, आणि डई, ईफ पेक्षां कमी आहे, तर १.१८ आणि १.१७ ह्यांवरून क आणि फ हे कोन लघुच असले पाहिजेत.

१.२७ पासून १.३४ पर्यंत जे सिद्धांत आहेत त्यांस पहिल्या पुस्तकाचा दुसरा भाग म्हटल्यास चिंता नाहीं. ह्यांत समांतर रेषांचा विचार केला आहे. बारावें प्रत्यक्ष प्रमाण १.२९ त प्रथम येतें. समांतर रेषां विषयींचे हे सिद्धांत नवीन विद्यार्थ्यांस लवकर कळत नाहींत, म्हणून त्यांचें उपपादन पुष्कळांनीं दुसऱ्या रीतींनीं केलें आहे. त्या रीतींविषयीं साधारणपणें एथें इतकें सांगणें पुरें आहे कीं त्यांत युक्लिडाच्या प्रत्यक्षप्रमाणा इतकें समजण्यास अवघड प्रत्यक्ष प्रमाण असून, कितीएक घोटाळ्यांत पाडणारे नवीन सिद्धांतही आहेत. परंतु बारावें प्रत्यक्ष प्रमाण एकदा मानलें म्हणजे युक्लिडाचीं उपपादनाची रीति सरळ व स्पष्ट आहे.

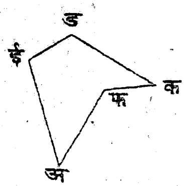
खेरीज युक्लिडाच्या बाराव्या प्रत्यक्ष प्रमाणांत थोडा फेर केल्यानें, तेंही समजण्या सारखें होतें. तो फेर हा आहे,—कापणाऱ्या दोनही रेषा तिसऱ्या एका रेषेशीं समांतर असत नाहींत. हें प्रत्यक्ष प्रमाण

घेतल्यानें १.२८ पर्यंत युक्लिडाच्या उपपादनांत फेर करावा लागत नाहीं. १.२९ तही 'म्हणून **बगह** आणि **गहड** हे कोन दोन काटकोनांहून कमी आहेत.' एथपर्यंत बदल करावी लागत नाहीं; पुढें मात्र बदल करावी लागते. ती अशी, म्हणून जर **ग** पासून अशी एक **गल** रेघ काढली कीं **लगह** आणि **गहड** हे दोन आंतील कोन मिळून, दोन काटकोनां बराबर होतील; तर ही **गल** रेघ १.२८ नें **कड** शीं समांतर होईल; आणि वरील प्रत्यक्ष प्रमाणानें **ग** बिंदूंतून जाणाऱ्या दोनही **गल**, **गब** रेघा तिसऱ्या **कड** रेघेशीं समांतर होत नाहींत.

ह्या लेखावरून असें लक्षांत येईल कीं १.२८ नंतर वरील प्रत्यक्षप्रमाण दिल्यानें, आणि १.२९ मध्यें वर दाखविलेला फेर केल्यानें, तो सिद्धांत सहज समजण्या जोगा होतो.

१.३०. ह्यांत वरील रीतीनें असें दाखवितां येईल कीं जर **अब** आणि **ईफ** ह्या रेघा प्रत्येकीं **कड** शीं समांतर आहेत, तर त्या एकमेकींशीं समांतर आहेत. कितीएक असें म्हणतात कीं हा सिद्धांत इतका उघड आहे कीं उपपादनाची मुळींच गरज नाहीं; कारण, जर **अब** आणि **कड**, त्यांच्या मध्यें असणाऱ्या **ईफ** रेघेस कधींही मिळत नाहींत, तर त्या एकमेकींसही मिळत नाहींत.

१.३२. ह्यास ज्या कुरलरी दिल्या आहेत त्या **सिमसनाच्या** आहेत. दुसऱ्या कुरलरींत आकृतीच्या बाहेरील कोन म्हणजे काय हें सांगितलें पाहिजे. आकृतीचा प्रत्येक कोन ज्या दोन बाजूंनीं होतो त्यांपैकीं एक बाजू त्या कोनाच्या बिंदूंतून वाढविली असतां वाढविलेली रेघ आणि न वाढविलेली दुसरी रेघ ह्यांच्या मध्यें त्या बिंदूशीं जो कोन होतो तो बाहेरील कोन होय. कोनाच्या रेघांपैकीं कोणतीही वाढविली तरी कामास येते; कारण दोनही बाजू वाढविल्यानें जे कोन पडतात ते १.१५ नें बराबर असतात.



युक्लिड ज्या सरलरेषाकृतींचा विचार करतो त्यांतील सर्व कोनांचीं तोंडें आंतल्या बाजूंकडे असतात. परंतु कांहीं आकृतींत किती एक कोनांचीं तोंडें बाहेरल्या बाजूसही असतात; जसें, बाजूच्या आकृतींत **अफक**

कोनाचें तोंड बाहेरल्या अंगास आहे, आणि तो दोन काटकोनांहून कमी आहे. परंतु तो कोन अईडकफ आकृतीचा आंतील कोन नाहीं. अफक कोन चार काटकोनांहून जितका कमी आहे तितका आंतील कोन आहे. जो कोन दोन काटकोनांहून अधिक असतो त्यास महाविशाळ कोन म्हणतात.

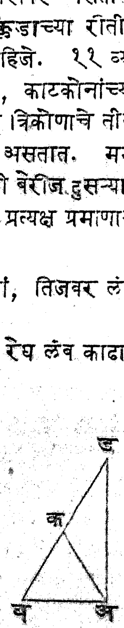
आकृतीचा एक किंवा अनेककोन महाविशाळ असले, तरी तिला १.३२ ची पहिली कुरलरी लागू पडते; परंतु दुसरी कुरलरी लागू पडत नाहीं.

१.३२. जर दोन त्रिकोणांत एकाचे दोन कोन प्रत्येकीं दुसऱ्याच्या दोन कोनां बराबर आहेत, तर त्यांचे तिसरे कोनही बराबर असतात. हें अनुमान भूमितींत बहुत स्थळीं उपयोगीं पडतें. युक्लिडाच्या रीतीनें ह्याचें उपपादन कसें करावें तें विद्यार्थ्यास समजलें पाहिजे. ११ व्या आणि २ ऱ्या प्रत्यक्ष प्रमाणांनीं काटकोनांची एक जोडी, काटकोनांच्या दुसऱ्या जोडी बराबर असते; म्हणून १.३२ नें एका त्रिकोणाचे तीन कोन मिळून दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन कोनां बराबर असतात. मग २ ऱ्या प्रत्यक्ष प्रमाणानें एका त्रिकोणाच्या दोन कोनांची बेरीज दुसऱ्याच्या दोन कोनांच्या बेरजे बराबर आहे; म्हणून ३ ऱ्या प्रत्यक्ष प्रमाणानें त्या त्रिकोणांचे तिसरे कोन बराबर आहेत.

१. ३२ नंतर रेषेच्या टोंकापासून, ती न वाढवितां, तिजवर लंब काढतां येतो.

अब दिलेली रेष आहे. अ पासून अब वर एक रेष लंब काढावयाची आहे.

अब वर अबक समभुज त्रिकोण कर.



बक वाढवून कड, कब बराबर कर; आणि अड सांध. म्हणजे अड, अब वर लंब होईल. कारण, १.५ नें कअड कोन कडअ कोना बराबर आहे, आणि कअब कोन कबअ कोना बराबर आहे. म्हणून २ ऱ्या प्रत्यक्ष प्रमाणानें बअड कोन, अबड आणि बडअ ह्या दोन कोनां बराबर आहे. म्हणून १.३२ नें बअड कोन काटकोन आहे.

१.३५ पासून १.३८ पर्यंत जे सिद्धांत आहेत, त्यांनीं भूमितीच्या प्रथम पुस्तकाचा तिसरा भाग होतो असें म्हटल्यास चिंता नाहीं. हे सिद्धांत, ज्या आकृति आकारानें नेहमीं सारख्या असत नाहींत, अशा आकृतींत क्षेत्रफळानें सारखेपणा दाखवितात.

१.३५. ह्यांत युक्लिडानें दिलेलें उपपादन **सिमसनानें** बदललें आहे. ह्याचें कारण **सिमसन** असें दाखवितो कीं **युक्लिडाच्या** रीतीनें उपपादनाचे तीन प्रकार होतील. **सिमसन** जेव्हां एका चतुष्कोणांतून एक त्रिकोण काढून टाकतो, आणि त्याच चतुष्कोणांतून दुसरा त्रिकोण काढून टाकतो, आणि मग शेषें बराबर आहेत असें अनुमान करतो, तेव्हां तो तिसरें प्रत्यक्ष प्रमाण विशेषरीतीनें लावतो. **युक्लिडाच्या** रीतीनें उपपादन केल्यास, पुस्तकांतील उपपादनाच्या उत्तर भागाचे दोन विभाग होतात. डाव्या हाताकडील आकृतींत **बई** आणि **डक** ह्या रेषांचा छेदनबिंदु **ग** आहे असें समज. तेव्हां **अबई** त्रिकोण **डकफ** त्रिकोणा बराबर आहे; प्रत्येकांतून **डगई** त्रिकोण काढून टाक; म्हणून **अबगड** आकृति **ईगकफ** आकृतीबराबर आहे; **गबक** त्रिकोण प्रत्येकास मिळीव; म्हणून **अबकड** समांतरभुज चौकोन, **ईबकफ** समांतरभुज चौकोना बराबर आहे. उजव्या हाताकडील आकृतींत **अईब** त्रिकोण, **डफक** त्रिकोणा बराबर आहे; प्रत्येकास **बईडक** आकृति मिळीव; म्हणून **अबकड** समांतरभुज चौकोन, **ईबकफ** समांतरभुज चौकोना बराबर आहे.

१.३५ मध्यें समांतरभुज चौकोनांचा जो सारखेपणा आहे तो क्षेत्रफळानें आहे, पण आकारानें नाहीं. जेव्हां दोन आकृति सर्वांशीं बराबर असतात तेव्हां त्यांस कोणी ग्रंथकार एकरूप म्हणतात. परंतु हा भेद फारसा न राखण्याचें कारण इतकेंच आहे कीं, ज्यांत संदेह उत्पन्न होईल असे सिद्धांत फारच थोडे आहेत, आणि त्यांत, क्षेत्रफळानें बराबर, हे शब्द घातल्यानें मुळींच संशय राहणार नाहीं.

१.३८. ह्या सिद्धांताचा उपयुक्त विशेष प्रकार म्हटला म्हणजे 'जे त्रिकोण समान पायांवर असतात आणि ज्यांचा शिरकोन बिंदु एकच असतो ते बराबर असतात' हा होय.

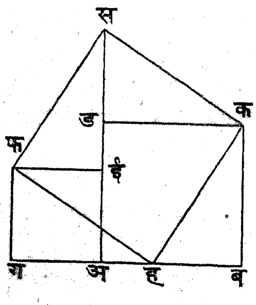
१.४०. हा सिद्धांत व्यस्त उपपादना खेरीजही सिद्ध करितां येतो.

बड, कड सांध. डबक आणि डईफ हे दोन त्रिकोण १.३८ नें बरोबर आहेत; अबक आणि डईफ हे त्रिकोण प्रतिज्ञेनें बराबर आहेत. म्हणून डबक आणि अबक हे त्रिकोण पहिले प्रत्यक्ष प्रमाणानें बराबर आहेत. म्हणून १.३९ नें अड, बक शीं समांतर आहे.

१.४४. ह्यांत अह आणि फग ह्या रेषा मिळतील असें युक्लिड सिद्ध करून दाखवीत नाहीं. रचनेंत जर प्रथम गह, बअ बराबर करून, हअ सांधली, तर ती १. ३३ नें गब शीं समांतर होते.

१.४७. हा सिद्धांत पायथागोरसाचा आहे असें म्हणतात. ह्या प्रसिद्ध सिद्धांताचें उपपादन अनेकांनीं अनेक रीतींनीं केलें आहे. त्या रीतीं पैकीं एक एथें दिली आहे.

अबकड आणि अईफग हे दोन चौरस असे ठेव कीं त्यांचे पाये एकाच सरळ रेषेंत येतील.



गह आणि ईस रेघा, अब रेघे बराबर कर, आणि हक, कस, सफ, फह सांध.

तेव्हां असें दाखवितां येईल कीं हबक त्रिकोण सर्वांशीं फईस, त्रिकोणा बराबर, आणि सडक त्रिकोण सर्वांशीं फगह त्रिकोणा बराबर आहे. म्हणून दोन चौरस मिळून, कसफह आकृती बराबर आहेत.

१.३२ च्या योगें असें दाखवितां येईल कीं कसफह ही आकृति चौरस आहे. आणि कहब काटकोन त्रिकोणाचा कह कर्ण आहे, आणि कब आणि बह बाजू दिलेल्या दोन चौरसांच्या बाजू बराबर आहेत. ह्या उपपादनांत १.३२ पुढील सिद्धांतांची गरज लागत नाहीं, आणि खेरीज ह्या उपपादनानें दोन दिलेले चौरस कसे कापले असतां, तुकडे मिळवून तिसरा एक चौरस करितां येईल हेंही समजतें.

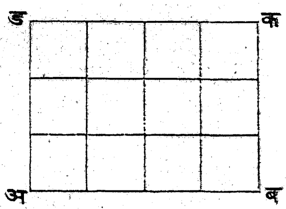
दुसरें पुस्तक.

ह्या पुस्तकांत अनेक रीतींनीं विभागलेल्या रेषांनीं झालेल्या काटकोन चौकोनांच्या संबंधांचा विचार केला आहे.

रेघ विभागली असतां तिचे विभाग होतात. परंतु रेघ **विभागणें** ह्याचा अर्थ पुढील प्रमाणें वाढविणें सोईचें आहे. जर एका रेषेंत, किंवा ती वाढवून, तींत एक बिंदु घेतला, तर त्या बिंदूपासून त्या रेघेच्या टोंकांपर्यंत जीं अंतरें त्यांस त्या रेघेचे विभाग म्हणतात. हे विभाग ओळखण्याची गरज पडते तेव्हां बिंदु रेषेंत असतां, तिच्या विभागांस **अंतर्विभाग** म्हणतात. आणि, बिंदु वाढविलेल्या रेषेंत असतां, तिच्या विभागास **बहिर्विभाग** म्हणतात.

ह्या पुस्तकांतील पहिले दहा सिद्धांत **अंकगणितां**तील आणि **बीजगणितां**तील कांहीं मूल नियमांशीं साम्य पावतात ही गोष्ट विद्यार्थ्यांच्या लक्षांत आल्या खेरीज राहणार नाहीं.

असें समज कीं अबकड काटकोन चौकोन ४ इंच लांब आणि ३ इंच रुंद आहे. तेव्हां बाजूंशीं इंच इंच अंतरावर समांतर रेघा काढल्यानें, आकृतीचे १२ समान भाग होतात; आणि प्रत्येक भाग एक इंच लांबीच्या बाजूवर काढलेला चौरस आहे.



एक इंच लांबीच्या रेघेवर काढलेल्या चौरसास, संक्षेपानें, **चौरसइंच** म्हणतात. म्हणून ४ इंच लांबीच्या व ३ इंच रुंदीच्या काटकोन चौकोनांत १२ चौरस इंच असतात; ह्या १२ चौरस इंचांस त्याचें **क्षेत्रफळ** म्हणतात. हीच गोष्ट दुसऱ्याही काटकोन चौकोनांस लागू आहे. उदाहरणार्थ, एक काटकोन चौकोन १२ फूट लांब आणि ७ फूट रुंद आहे, तर त्याचें क्षेत्रफळ १२ पट ७ म्हणजे ८४ चौरस फूट आहे. एथें इतकें लक्षांत ठेविलें पाहिजे कीं काटकोन चौकोनाच्या बाजू लांबीच्या एकाच मानानें मोजल्या आहेत. उदा-

हरणार्थ, जर एक काटकोन चौकोन एक यार्ड लांब आणि दीड फूट रुंद आहे, तर त्याची प्रत्येक बाजू एकाच नांवाच्या लांबीच्या मानांत आणली पाहिजे, म्हणजे असें समजलें पाहिजे कीं तो ३६ इंच लांब आणि १८ इंच रुंद आहे, आणि त्याचें क्षेत्रफळ ३६ पट १८ म्हणजे ६४८ चौरस इंच आहे.

असेंच, जर एका काटकोन चौकोनाची एक बाजू लांबीच्या कांहीं एक मानाची कांहीं पुरीपट आहे, आणि ती जवळची दुसरीही बाजू त्याच लांबीच्या मानाची कांहीं पुरीपट आहे, तर ह्या संख्यांचा गुणाकार त्या काटकोन चौकोनांतील त्याच मानाच्या चौरसांची संख्या होईल.

पुनः असें समज कीं एका चौरसाची बाजू ५ इंच आहे, तर त्याचें क्षेत्रफळ वरील नियमानें ५ पट ५ म्हणजे २५ चौरस इंच आहे. आतां, २५ स अंकगणितांत ५ चा वर्ग म्हणतात; म्हणून, जर एक रेघेची लांबी लांबीच्या एका मानाची कांहीं पुरीपट आहे, तर त्या रेघेवर काढलेल्या चौरसाचें क्षेत्रफळ त्या रेघेची लांबी दाखविणाऱ्या संख्येच्या वर्गानें दाखविलें जाईल.

ह्यावरून असें लक्षांत येईल कीं दोन संख्यांचा गुणाकार आणि दोन रेघांनीं झालेला काटकोन चौकोन ह्यांच्या मध्यें संबंध आहे, आणि संख्येचा वर्ग आणि एका रेघेवरील चौरस ह्यांच्या मध्यें संबंध आहे; आणि ह्या संबंधामुळें युक्लिडाच्या दुसऱ्या पुस्तकांतील पहिले दहा सिद्धांत, अंकगणित आणि बीजगणित ह्यांतील नियमांशीं जमतात.

विद्यार्थ्यांच्या लक्षांत ही गोष्ट आलीच असेल कीं भूमितीच्या दृष्टीनें रेघेवर काढलेला चौरस आणि अंकगणिताच्या दृष्टीनें संख्येचा वर्ग असें म्हणण्याचा परिपाठ आहे. युक्लिडकृत भूमितीचे भाषांतरकर्ते १.४७, १.४८ ह्यांत 'रेघेवर काढलेला चौरस, असें प्रथम म्हणून, मग रेघेचा वर्ग असें म्हणतात. परंतु युक्लिड स्वतां असें करीत नाहीं, आणि ह्या पुस्तकांत त्याच्या रीतीसच अनुसरून लिहिलें आहे.

अंकगणित आणि बीजगणित ह्यांतील नियमांशीं दुसऱ्या पुस्तकांतील दहा सिद्धांतांचा पूर्वोक्त संबंध असल्या मुळें कांहीं युक्लिडकृत भूमितिकार त्यांचें उपपादन अंकगणिताच्या आणि बीजगणिताच्या रीतींनींही करतात. परंतु ज्या विद्यार्थ्यास अंकगणिताची आणि बीज-

गणिताची माहिती आहे त्यास अशीं उपपादनें सहज करितां येतील, म्हणून तीं त्या सिद्धांतां बराबर दिलीं नाहींत.

पाहिल्या दहा सिद्धांतांचा क्रम आणि कथन अनेक रीतींनीं पालटतां येतात; परंतु त्याविषयीं एथें विस्तारानें लिहून विषयांतर करणें बराबर वाटत नाहीं.

२.२,२.३ हे सिद्धांत २.१ चे विशेष प्रकार आहेत.

२.४ हा सिद्धांत बहुत उपयुक्त आहे. त्याचा विशेष प्रकार एथें सांगितला पाहिजे. एका रेषेचे दोन समान विभाग केले, तर सर्व रेषेवर काढलेला चौरस कोणत्याही एका समान विभागावर काढलेल्या चौपट चौरसा बराबर असतो.

२.५ आणि २.६ एकाच कथनानें सांगतां येतात. दोन रेषांची बेरीज आणि वजाबाकी ह्यांनीं झालेला काटकोन चौकोन त्या दोन रेषांवर काढलेल्या चौरसांच्या वजाबाकी बराबर असतो; किंवा, दोन रेषांनीं झालेला काटकोन चौकोन आणि त्यांच्या अर्ध वजाबाकीवर काढलेला चौरस मिळून, त्यांच्या अर्ध बेरजेवर काढलेल्या चौरसा बराबर असतात.

२.७ ह्याचें कथन असें देतां येतें. दोन रेषांच्या वजाबाकीवर काढलेला चौरस, त्या दोन रेषांवर काढलेल्या चौरसांहून, त्या रेषांनीं झालेल्या दुपट काटकोन चौकोनानें कमी असतो. मग हा सिद्धांत आणि २.४, आणि दुसरें प्रत्यक्ष प्रमाण ह्यांवरून असें अनुमान काढतां येतें कीं दोन रेषांच्या बेरजेवर आणि वजाबाकीवर काढलेले चौरस मिळून, त्या रेषांवर काढलेल्या चौरसांच्या बेरजेच्या दुपटी बराबर असतात; आणि ह्या कथनांत २.९ आणि २.१० येतात, म्हणून त्या दोन सिद्धांतांचीं उपपादनें गाळतां येतील.

२.८. २.४ ह्याचा जो विशेष प्रकार वर सांगितला आहे तो लक्षांत आणल्यानें, २.५ आणि २.६ ह्यांच्या पूर्वोक्त एका कथनांतच २.८ येतो.

२.११. बीजगणिताची माहिती झाल्यावर विद्यार्थ्यास असें करून येईल कीं २.११ हा सिद्धांत एका विशेष वर्गसमीकरणाच्या उत्तराचें भूमितिद्वारा स्पष्टीकरण आहे.

२.१२,२.१३. हे सिद्धांत १.४७ च्या संबंधानें मौजेचे आहेत; आणि ते त्रिकोणमितींत बहुत उपयोगीं आहेत असें विद्यार्थ्यास पुढें करून

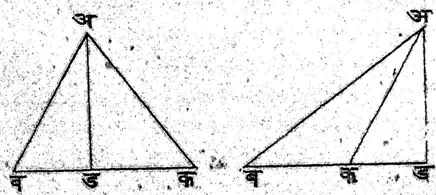
२.१२ ची उलट ही आहे. जर त्रिकोणाच्या एका बाजूवरील चौरस दुसऱ्या दोन बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजेहून अधिक आहे तर पहिल्या बाजू समोरील कोन विशाळ असतो.

कारण, तो कोन काटकोन तर व्हावयाचाच नाहीं, कांकीं तेव्हां १.४७ नें पहिल्या बाजूवरील चौरस दुसऱ्या दोन बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजे बराबर होईल; आणि तो कोन लघुही व्हावयाचा नाहीं, कांकीं तेव्हां २.१३ नें पहिल्या बाजूवरील चौरस दुसऱ्या दोन बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजेहून कमी होईल; म्हणून तो कोन विशाळ असला पाहिजे.

२.१३ ची उलट ही आहे. जर त्रिकोणाच्या एका बाजूवरील चौरस दुसऱ्या दोन बाजूंवरील चौरसांच्या बेरजेहून कमी आहे, तर पहिल्या बाजू समोरील कोन लघु असतो. ह्याचें उपपादन वरील प्रमाणेंच आहे.

२.१३. ह्याचे उपपादनांत युक्लिड पहिला प्रकार मात्र देतो. परंतु हा सिद्धांत सर्व त्रिकोणांस लागू असल्यामुळें सिमसनानें दुसरा आणि तिसरा प्रकार जोडले आहेत. परंतु पहिल्या आणि दुसऱ्या प्रकारांस एकच उपपादन पुरें आहे, आणि दोनही प्रकार एकदम घेतल्यानें उपपादन थोडक्यांत होऊन अधिक स्पष्ट होतें; म्हणून तें एथें दिलें आहे.

अबक कोणताही एक त्रिकोण आहे, आणि त्याच्या लघु कोनांपैकीं ब एक कोन आहे; आणि जर अक, बक वर लंब नसेल, तर



होईल.

पहिल्यानें, अक, बक वर लंब नाहीं असें समज; तेव्हां कब, बड ह्यांवरील चौरस, दुपट कब, बड काटकोन चौकोन आणि कड वरील चौरस ह्यांबराबर आहेत. (२.७)

प्रत्येकांत डअ वरील चौरस मिळीव.

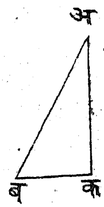
म्हणून कब, बड, डअ ह्यांवरील चौरस, दुपट कब, बड काटकोन-चौकोन आणि कड, डअ ह्यां वरील चौरस ह्यां बराबर आहेत. (प्र. प्र. २)

परंतु अब वरील चौरस, बड आणि डअ ह्यांवरील चौरसां बराबर, आणि अक वरील चौरस, कड आणि डअ ह्यां वरील चौरसां बराबर आहे, कारण बडअ कोन काटकोन आहे. (१.४७)

म्हणून कब व बअ ह्यांवरील चौरस, अक वरील चौरस आणि दुपट कब, बड काटकोन चौकोन ह्यां बराबर आहेत.

म्हणजे एकटा अक वरील चौरस, कब आणि बअ ह्यांवरील चौरसां पेक्षां, दुपट कब, बड काटकोन चौकोनानें कमी आहे.

दुसऱ्यानें अक, बक वर लंब आहे असें समज; तेव्हां लंब आणि लघुकोन ह्यांच्या मधील रेघ बक च आहे.



आणि अब वरील चौरस, अक आणि कब ह्यांवरील चौरसां बराबर आहे. (१.४७)

म्हणून अक वरील चौरस, अब आणि बक ह्यांवरील चौरसांपेक्षां, बक वरील दुपट चौरसानें कमी आहे.

२.१४. हा सिद्धांत युक्लिडाच्या कोणत्याही पुस्तकांत येत नाहीं, आणि ६.२२ सिद्धांतांत ह्याचा अंतर्भाव होतो.

तिसरें पुस्तक.

ह्या पुस्तकांत वर्तुळाचे गुण सांगितले आहेत.

ह्या पुस्तकाच्या २ ऱ्या व्याख्येंत काय असावें ह्याविषयीं वेगळालीं मतें आहेत. कितीएकांच्या मतीं त्या व्याख्येचा अर्थ इतकाच आहे, कीं दोन वर्तुळें स्पर्शबिंदूच्या शेजारीं एकमेकास कापीत नाहींत; आणि तीं एकमेकास दुसऱ्या कोणत्याही बिंदूंत कापीत नाहींत हें सिद्ध करून दाखविलें पाहिजे. दुसऱ्या कितीएकांच्या मतीं त्या व्याख्येचा अर्थ असा आहे कीं तीं वर्तुळें मुळींच एकमेकास कापीत नाहींत; आणि हें मत खरें दिसतें. ती व्याख्या पुढील प्रमाणें दिल्यास अधिक उघड होईल. दोन वर्तुळांच्या परिघांत एक किंवा अधिक बिंदु साधारण असून, त्या साधारण बिंदू खेरिज किंवा बिंदू खेरीज, एक वर्तुळाचे इतर सर्व बिंदु दुसऱ्या वर्तुळांत असतात, तेव्हां त्या दोन वर्तुळांस आंतून स्पर्श करणारीं वर्तुळें म्हणतात. आणि जेव्हां दोन वर्तुळांच्या परिघांत एक किंवा अधिक बिंदु साधारण असून, त्या साधारण बिंदूखेरीज किंवा बिंदूंखेरीज प्रत्येक वर्तुळाचे इतर सर्व बिंदु दुसऱ्या वर्तुळा बाहेर असतात, तेव्हां त्या दोन वर्तुळांस बाहेरून स्पर्श करणारीं वर्तुळें म्हणतात. मग तिसऱ्या पुस्तकांत असें दाखविलें आहे कीं स्पर्श करणाऱ्या दोन वर्तुळांच्या परिघांत एकच साधारण बिंदु असतो.

वर्तुळाच्या मर्यादेच्या भागास नांव असणें सोयीचें आहे, म्हणून त्यास कौंस हें नांव दिलें आहे. परंतु युक्लिड स्वतां वर्तुळाच्या सर्व मर्यादेस आणि तिच्या भागास परिधि किंवा परिघच म्हणतो.

३.१. ह्याच्या उपपादनांत डक, ई पर्यंत वाढीव असें म्हटलें आहे; पण ह्या म्हणण्यांत ड बिंदु वर्तुळांत आहे असें होतें, आणि तो आंतच आहे ह्याचें उपपादन युक्लिडानें ३.२ त केलें आहे.

३.३. ह्यांत दोन भाग आहेत; आणि प्रत्येक भाग दुसऱ्याची उलट आहे; आणि हा सर्व सिद्धांत ३.१ तील कुरलरीची उलट आहे.

३.५ आणि ३.६. हे सिद्धांत एकांतच आणावयाचे होते. ते एकांत आणल्यानें त्यांचें कथन हें आहे. जर दोन वर्तुळांचे परिघ एका बिंदूंत

मिळतात, तर त्यांचे मध्य एकच बिंदूंत असत नाहींत. म्हणून ज्या वर्तुळांचे मध्य एकाच बिंदूंत असून, त्यांच्या परिघांत एक बिंदु साधारण असतो तीं वर्तुळें सर्वांशीं मिळालींच पाहिजेत.

३.७, ३.८. प्रोफेसर डी मार्गन असें म्हणतो कीं ३.७ मध्यें असें मानलें आहे कीं फईब कोन फईक कोनाहून मोठा आहे; आणि प्रतिज्ञेंत तर डफब कोन डफक कोनाहून मोठा आहे इतकें मात्र दिलें आहे; आणि ३.८ मध्यें असें मानलें आहे कीं डलम त्रिकोणांत स पडतो, आणि डमफ त्रिकोणा बाहेर ई पडतो. तो सुचवितो कीं ह्या दोन गोष्टी खालीं सांगितलेल्या दोन सिद्धांतांच्या योगें सिद्ध करून दाखवितां येतात; आणि ते सिद्धांत १.२१ नंतर असावे.

दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या रेघे पर्यंत ज्या अनेक रेघा निघतात त्या सर्वांत लंब रेघ लहान असते; आणि दुसऱ्या रेघांत लंबास समीपतर रेघ दूरतर रेघेहून लहान असते; आणि उलट असेंच समजावें; आणि दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या रेघे पर्यंत लंब रेघेच्या एकेक बाजूस एकेक अशा दोनच समान रेघा काढतां येतात.

त्रिकोणाच्या शिरकोन बिंदूपासून पाया पर्यंत काढलेली रेघ, दुसऱ्या दोन बाजूंत जी मोठी असते तीहून लहान असते, आणि जर त्या दोन बाजू बराबर आहेत, तर प्रत्येकीहून लहान असते.

पुढील सिद्धांत ३.७ आणि ३.८ ह्यांसारिखाच आहे.

वर्तुळाच्या परिघावर एक बिंदु घेऊन त्यापासून परिघा पर्यंत ज्या अनेक रेघा काढतां येतात त्यांत वर्तुळांच्या मध्यांतून जाणारी रेघ मोठी असते; आणि दुसऱ्या रेघांत मध्यांतून जाणाऱ्या महत्तम रेघेस समीपतर रेघ दूरतर रेघेहून मोठी असते; आणि त्या बिंदूपासून महत्तम रेघेच्या एकेका बाजूस एकेक अशा दोनच समान रेघा काढतां येतात.

ह्या सिद्धांताचे पहिले दोन भाग ३.१५ मध्यें आले आहेत. आणि तीनही भागांचें उपपादन ३.७ तील उपपादना प्रमाणें करितां येतें. ह्या तीनही भागांचें उपपादन तर केलेंच पाहिजे, कारण ३.१० वरील टिपणावरून असें लक्षांत येईल कीं त्याचे उपपादनास तिसऱ्या भागाची गरज लागते.

३.९. ह्यांत ई बिंदु अडक कोनांत आहे असें मानतां येईल; आणि तेव्हां डक, डब हून मोठी आहे, आणि डब, डअ हून मोठी आहे असें दाखवितां येत नाहीं. परंतु तेव्हां इतकें मात्र दाखवितां येतें कीं डक किंवा डअ, डब हून लहान आहे; आणि इतकेंही सिद्धांताचें उपपादन करण्यास पुरें आहे.

युक्लिडानें ३. ९ चीं दोन उपपादनें दिलीं आहेत, पण सिमसनानें त्यांतील दुसरें मात्र घेतलें आहे. युक्लिडाचें पहिलें उपपादन हें आहे. अब रेषेचा मध्य बिंदु आणि ड सांध; तेव्हां असें दाखवितां येईल कीं ही काढलेली रेघ अब रेघेवर लंब आहे; म्हणून ३.१, क्रुरलरीवरून वर्तुळाचा मध्य ह्या रेघेंत असला पाहिजे. ह्याप्रमाणेंच बक चा मध्य आणि ड सांधणाऱ्या रेघेंत वर्तुळाचा मध्य असला पाहिजे. म्हणून वर्तुळाचा मध्य ड च आहे; कारण दोन रेघांस एक बिंदूपेक्षां अधिक बिंदु साधारण असत नाहींत.

३.१०. युक्लिडानें हा सिद्धांत दोन रीतींनीं दाखविला आहे. परंतु सिमसनानें दुसरी मात्र दिली आहे. युक्लिडाची पहिली रीति ३.९ च्या पहिल्या रीतीप्रमाणेंच आहे. तो असें दाखवितो कीं प्रत्येक वर्तुळाचा मध्य, स आणि बग चा मध्यबिंदु सांधणाऱ्या रेघेंत आहे, आणि स आणि बह चा मध्यबिंदु सांधणाऱ्या रेघेंतही आहे; म्हणून स च प्रत्येक वर्तुळाचा मध्य असला पाहिजे.

खेरीज सिमसनानें दिलेलें उपपादन अपुरें आहे. कारण, स बिंदु डईफ वर्तुळा बाहेर, वर्तुळाच्या परिघावर, किंवा वर्तुळांत आहे असें मानतां येईल; आणि ह्या तीन कल्पनां पैकीं युक्लिडानें शेवटील कल्पनेचा मात्र विचार केला आहे. स बिंदु डईफ वर्तुळा बाहेर मानिल्यास ३.८ सिद्धांताशीं विरोध येतो; म्हणून तसें मानतां येत नाहीं. डईफ वर्तुळाच्या परिघावर स बिंदु मानल्यास ३.७ आणि ३.८ ह्या वरील टिपणांच्या शेवटीं सांगितलेल्या सिद्धांताशीं विरोध येतो; म्हणून तसेंही मानतां येत नाहीं.

३.१० मध्यें जें काय दाखविलें आहे तें हें आहे कीं दोन वर्तुळांच्या परिघांत दोहोंपेक्षां अधिक साधारण बिंदु असत नाहींत, परंतु उपपादनांत असें मुळींच सांगितलें नाहीं कीं तीं वर्तुळें एकमेकास कापतात. तथापि हा सिद्धांत कापणाऱ्या वर्तुळां विषयींच आहे असें म्हटलें पाहिजे; कारण,

३.१२ मध्यें असें दाखविलें आहे, कीं जर दोन वर्तुळें एकमेकांस स्पर्श करितात तर त्यांस एकापेक्षां अधिक साधारण बिंदु असत नाहींत.

३.११, ३.१२. सिमसनानें आणि दुसऱ्यांनीं दिलेल्या ह्या सिद्धांतांच्या कथनांत 'स्पर्शबिंदु' हा शब्द आला आहे; परंतु ३.१२ पर्यंत असें माहीत होत नाहीं कीं स्पर्शबिंदु एकच असतो; आणि ३. ११ मध्यें ड आणि ह बिंदु मिळाले, आणि ३.१२ मध्यें क आणि ड बिंदु मिळाले असें मानलें तरी त्यांच्या उपपादनांत फेर होत नाहीं. ३.११ आणि ३.१२ ह्यांचा समावेश एकाच कथनांत करितां येतो.

जर दोन वर्तुळें एकमेकांस स्पर्श करितात, तर त्यांच्या परिघांतील साधारण बिंदु त्यांचे मध्य सांधणाऱ्या रेषे बाहेर असत नाहीं.

३.११ चें उपपादन ३.७ नेंही करतां येतें. ३.७ नें ज्या वर्तुळाचा मध्य फ आहे त्याच्या परिघा पर्यंत ग पासून काढलेल्या सर्व रेषांत गह लहान आहे. म्हणून गह, गअ पेक्षां म्हणजे गड पेक्षां लहान आहे, पण ही गोष्ट अशक्य आहे. ह्याच प्रमाणें ३.१२ चें उपपादन ३.८ नें करतां येतें.

३.१३. ह्यांतील डाव्या हातची आकृति सिमसनानें जोडली आहे. युक्लिडकृत मूळग्रंथांत उजवे हातची आकृति मात्र आहे. खेरीज पहिल्या आकृतीची गरजही नाहीं; कारण ३.११ मध्यें असें दाखविलें आहे कीं जर दोन वर्तुळें आंतून स्पर्श करतात, तर त्यांचा स्पर्शबिंदु, त्यांचे मध्य सांधणाऱ्या रेषे बाहेर नसतो. म्हणून एकच स्पर्शबिंदु आहे हें दाखविण्याकरितां, दुसरा मानलेला स्पर्शबिंदु मध्यसांधणाऱ्या रेषेंतच पण दुसऱ्या बाजूस घेतला म्हणजे पुरे आहे. ही कल्पना करून युक्लिड असें दाखवितो, कीं तेव्हां बड दोन्ही वर्तुळांचा व्यास होईल, आणि अर्थात त्याचे दुभाग बिंदु दोन वेगळाले होतील; पण ही गोष्ट अशक्य आहे.

ह्याच रीतीनें ३.१३ च्या दुसऱ्या भागाचें उपपादन युक्लिडास करतां आलें असतें. कारण, वर्तुळांचे मध्यसांधणाऱ्यारेषेबाहेर स्पर्शबिंदु नसतो; म्हणून दोन वर्तुळें जेव्हां बाहेरून एकमेकास स्पर्श करतात; तेव्हां त्यांस दुसरास्पर्शबिंदु असतो ही कल्पनाच मुळींच संभवत

परंतु असें वाटतें की ज्या (पुस्तकांत दिलेल्या) रीतीनें अनुमान क्रमाक्रमानें निघतें ती युक्लिडास बरी वाटली.

३.१७. ह्यांतील रचनेवरून उघड आहे कीं दिलेल्या वर्तुळास दिलेल्या बाहेरील बिंदूपासून स्पर्श करणाऱ्या दोन रेघा काढतां येतात; आणि त्या परस्पर लांबीनें समान असून दिलेला बाहेरील बिंदु आणि वर्तुळाचा मध्य सांधणाऱ्या रेघेशीं समान कोन करितात.

विद्यार्थ्यास ३.३१ शिकल्यावर असें कळून येईल कीं ३.१७ तील कृत्य दुसऱ्या रीतीनेंही करतां येतें. ती ही आहे; अई ज्याचा व्यास होईल असें वर्तुळ काढ; म्हणजे तें दिलेल्या वर्तुळास ज्या दोन बिंदूंत कापील त्या बिंदूंशीं अ पासून काढलेल्या दोन रेघा दिलेल्या वर्तुळास स्पर्श करितील.

३.१८. ह्यानें ३.१६ पेक्षां अधिक माहिती होते असें दिसत नाहीं. कारण, ३.१६ मध्यें असें दाखविलें आहे कीं दिलेल्या वर्तुळास दिलेल्या बिंदूशीं स्पर्श करणारी एकच रेघ असते, आणि ती स्पर्शरेघ आणि स्पर्शबिंदू पर्यंत काढलेली त्रिज्या ह्यांच्या मधील कोन काटकोन असतो.

३.२०. ह्या सिद्धांताच्या उपपादनांत दोन गोष्टी मानल्या आहेत. असें समज कीं अ, ब ची दुपट आणि क, ड ची दुपट आहे, तर उपपादनाच्या पहिल्या भागांत असें मानलें आहे कीं अ आणि क ह्यांची बेरीज, ब आणि ड ह्यांच्या बेरजेची दुपट आहे, आणि उपपादनाच्या दुसऱ्या भागांत असें मानलें आहे कीं, अ आणि क ह्यांची वजाबाकी ब आणि ड ह्यांच्या वजाबाकीची दुपट आहे. पहिली गोष्ट ५.१ चा विशेष प्रकार आहे, आणि दुसरी ५.५ चा विशेष प्रकार आहे.

दोन काटकोनांहून मोठे कोन घेतल्यानें ३.२० च्या कथनांत उपयुक्त विस्तार करतां येईल. प्रथम आकृतींत बफ आणि कफ रेघा काढल्या आहेत असें समज. तेव्हां बईअ कोन बफअ कोनाची दुपट आहे, आणि कईअ कोन कफअ कोनाची दुपट आहे; म्हणून बईअ आणि कईअ ह्या कोनांची बेरीज बफक कोनाची दुपट आहे. बईअ आणि कईअ ह्या कोनांची बेरीज दोन काटकोनांहून मोठी आहे, आणि हिला

महाविशाल कोन म्हणतात. (१.३२, टिपण पाहा). म्हणजे बईक महाविशाल कोन बफक कोनाची दुपट आहे.

३.२० च्या ह्या विस्तृत कथनानें तिसऱ्या पुस्तकांतील किती एक उपपादनें स्वल्प करतां येतात. उदाहरणार्थ, ३.२० नेंच, ३.२१ चें उपपादन, दोन प्रकार न करतां होतें; आणि ३.२० आणि मध्याशीं होणाऱ्या कोनांची बेरीज चार काटकोनां बराबर असते ही गोष्ट इतक्यानेंच ३.२२ चें उपपादन होतें; आणि ३.२० पासून ३.३१ लागलाच सिद्ध होतो.

३.२१. ह्यांत युक्लिडानें स्वतां पहिलाच प्रकार दिला आहे; दुसरा प्रकार सिमसनानें आणि दुसऱ्यांनीं जोडला आहे. ३.२१ च्या कोणत्याही आकृतींत बड च्या ज्या बाजूस अ आहे त्याच बाजूस एक बिंदु घेतला, तर त्या बिंदूपासून बड च्या टोंका पर्यंत काढलेल्या रेषांनीं जो कोन होतो तो, घेतलेला बिंदु बअड कोनांत किंवा कोना बाहेर असतो त्याप्रमाणें बअड कोनाहून मोठा किंवा लहान होतो, हें अनुमान १.२१ पासून निघतें.

तिसऱ्या पुस्तकाच्या शेष टिपणांतून कितीएकांस ४.५ चा संबंध आणावा लागेल, म्हणून तो विद्यार्थ्यानें अगोदर वाचावा.

पुढील सिद्धांत बहुत उपयुक्त आहे: **एकाच पायावर आणि त्याच्या एकाच अंगास समान शिरकोनांचे त्रिकोण काढले, तर त्यांचे शिरकोनबिंदु वर्तुल खंडाच्या कौंसावर पडतील.**

कारण त्या त्रिकोणांतून एका भोंवतीं ४.५ नें वर्तुळ काढ; तेव्हां दिलेला शिरकोन ज्या वर्तुलखंडांत येईल त्याच्या कौंसावरच दुसऱ्या कोणत्याही त्रिकोणाचा शिरकोनबिंदु आला पाहिजे, कांकीं, ह्या टिपणाच्या प्रथम भागावरून तो शिरकोन वर्तुळांत किंवा वर्तुळा बाहेर असत नाहीं.

३.२२. ह्याची उलट खरी असून, बहुत उपयुक्त आहे. ती ही; **जर चतुष्कोणाचे समोरा समोरील कोन मिळून दोन काटकोनांबराबर आहेत; तर त्या चतुष्कोणा भोंवतीं वर्तुळ काढतां येईल.** कारण, अबकड तसा एक चतुष्कोण आहे असें समज. अबक त्रिकोणा भोंवतीं ४.५ नें वर्तुळ काढ. अक रेषेनें कापलेल्या वर्तुलखंडाच्या ड बिंदूकडील कौंसांत ई एक बिंदु घे. तेव्हां ३.२२ नें ब आणि ई

बरोबर आहेत. ... बरोबर आहेत. म्हणून सांधून झालेले कोन मिळून, दोन काटकोनांबरोबर आहेत. म्हणून मागील टिपणानें ई आणि ड ई कोन ड कोना बराबर आहे. म्हणून मागील टिपणानें ई आणि ड बिंदु एकाच कौंसावर आहेत.

३.३२. ह्याची उलट खरी असून उपयुक्त आहे. ती ही; जर एक रेघ वर्तुळास मिळते, आणि मिलनबिंदूपासून काढलेली रेघ वर्तुळास कापते, आणि त्या दोन रेघांच्या मधील कोन वर्तुळाच्या व्युत्क्रम खंडांतील कोना बराबर आहे, तर वर्तुळास मिळणारी रेघ स्पर्शरेघ होते.

हा सिद्धांत व्यस्त उपपादनानें दाखवितां येतो. शक्य असल्यास असें समज कीं, ती मिळणारी रेघ वर्तुळास स्पर्श करीत नाहीं. मिलन-बिंदूपासून वर्तुळास स्पर्शरेघ काढ. तेव्हां ३.३२ नें आणि प्रति-ज्ञेनें असें दाखवितां येईल कीं एकाच बिंदूंतून जाणाऱ्या दोन वेगळ्या रेघा, त्याच बिंदूंतून जाणाऱ्या तिसऱ्या रेघेशीं एकाच अंगास एकच कोन करितात, परंतु हें अशक्य आहे.

३.३५ आणि ३.३६. ह्यांच्या उपपादनांत पुढील सिद्धांत साहजिक सिद्ध होतो. **समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायांत किंवा वाढविलेल्या पायांत एक बिंदु घेतला, तर पायाच्या विभागांनीं झालेला काटकोन चौकोन, तो बिंदु आणि शिरकोनबिंदु सांधणाऱ्या रेघेवरील चौरस आणि त्रिकोणाच्या एका समान बाजू वरील चौरस ह्यांच्या वजाबाकी बराबर असतो.**

युक्लिडानें ह्या सिद्धांताचें उपपादन वर्तुळाची योजना न करितां केलें आहे; जर ह्या सिद्धांताचें कथन आणि उपपादन ३.३५ आणि ३.३६ ह्या पूर्वी केलें, तर ह्या दोन्ही सिद्धांतांचीं उपपादनें संक्षिप्त आणि स्वल्प होतील.

पुढील सिद्धांत ३.३५ आणि ३.३६ ची कुरलरी ह्यांशीं उलट आहे. **जर अब आणि कड रेघा एकमेकीस ओ मध्यें छेदितात, आणि अओ, ओब काटकोन चौकोन कओ, ओड काटकोन चौ-**

कोना बरोबर आहे, तर वर्तुळाचा परिघ अ, ब, क, ड ह्या चार बिंदूंतून जातो.

कारण, अबक त्रिकोणा भोंवतीं ४.५ नें वर्तुळ काढ; तेव्हां ३.३५नें किंवा ३.३६ च्या क्रुरलरीनें व्यस्तरीत्या असें दाखवितां येईल कीं त्या वर्तुळाचा परिघ ड बिंदूंतूनही जाईल.

चौथें पुस्तक.

भूमितीच्या चौथ्या पुस्तकांत सगळीं कृत्येंच आहेत. पहिले पांच सिद्धांत त्रिकोणां विषयीं आहेत; आणि शेष सिद्धांत समभुज आणि समकोण बहुकोणां विषयीं आहेत. समभुज आणि समकोण बहुकोणास **नियमित** बहुकोण म्हणतात.

४.४. ह्यांत सांगितलेल्या रीतीनेंच त्रिकोणाच्या एका बाजूस आणि दुसऱ्या दोन बाजू वाढवून त्यांस स्पर्श करणारें वर्तुळ काढतां येतें. उदाहरणार्थ असें समज कीं अबक त्रिकोणाच्या बक बाजूस, आणि अब आणि अक बाजू वाढवून त्यांस स्पर्श करणारें वर्तुळ काढावयाचें आहे. वाढलेली अब आणि बक ह्यांच्या मधील कोन दुभाग; आणि वाढविलेली अक आणि बक ह्यांच्या मधील कोन दुभाग; तेव्हां त्या दुभागणाऱ्या रेषा ज्या बिंदूशीं मिळतील तो बिंदु विवक्षित वर्तुळाचा मध्य होईल. ह्याचें उपपादन ४.४ च्या उपपादना प्रमाणें आहे.

जें वर्तुळ त्रिकोणाच्या एका बाजूस आणि दुसऱ्या दोन वाढविलेल्या बाजूंस स्पर्श करतें त्यास त्रिकोणांत **बाहेरून काढलेलें** वर्तुळ म्हणतात.

असेंच, दिलेल्या त्रिकोणाशीं असा एक समकोण त्रिकोण काढतां येईल, कीं त्याची एक बाजू आणि दुसऱ्या दोन वाढविलेल्या बाजू दिलेल्या वर्तुळास स्पर्श करितील. कारण, ४.२ च्या आकृतींत अस पुनः वर्तुळास मिळे पर्यंत वाढीव, आणि त्या छेदनबिंदूशीं वर्तुळास स्पर्शरेघ काढ; म्हणजे ही स्पर्शरेघ आणि नब आणि नक ह्यांचे विभाग

मिळून एक त्रिकोण होईल, आणि तो मलन त्रिकोणाशीं आणि अर्थात्‌च ईडफ त्रिकोणाशीं समकोण होईल; आणि ह्या त्रिकोणाची एक बाजू आणि दुसऱ्या दोन वाढविलेल्या बाजू दिलेल्या वर्तुळास स्पर्श करितील.

४.५. ह्या सिद्धांताच्या उपपादनांत ईफ आणि डफ का मिळतात ही गोष्ट सिमसनानें जोडली आहे. पण कोणी ही गोष्ट पुढील दुसऱ्या रीतीनेंही सिद्ध करून दाखवितात. डई सांध; तेव्हां ईडफ आणि डईफ हे दोन कोन मिळून, अडफ आणि अईफ ह्या दोन कोनांहून म्हणजे दोन काटकोनांहून कमी आहेत; म्हणून १२ व्या प्रत्यक्ष प्रमाणानें डफ आणि ईफ मिळतील. ह्या सिद्धतेंत असें मानावें लागतें कीं अडई आणि अईड हे कोन लघु कोन आहेत. परंतु हें सहज दाखवितां येईल कीं डई, बक शीं समांतर आहे; म्हणून अडई त्रिकोण अबक त्रिकोणाशीं समकोण आहे. ह्याकरितां अबक त्रिकोणाच्या अब आणि अक अशा दोन बाजू घ्याव्या कीं त्यांसमोरील अकब आणि अबक हे कोन लघु येतील.

४.१०. ह्यांतील त्रिकोणाचा शिरकोन दोन काटकोनांचा पांचवा विभाग आहे हें सहज समजण्यासारखें आहे; म्हणून तो कोन दुभागल्यानें भूमितिद्वारा एका काटकोनाचे पांच समान विभाग करतां येतील.

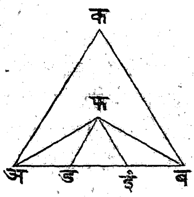
चवथ्या पुस्तकांतील सिद्धांतांवरून वर्तुळाच्या परिघाचे ३,६,१२, २४,......समान विभाग; आणि ४,८,१६,३२,......समान विभाग; आणि ५,१०, २०,४०,......समान विभाग; आणि १५,३०,६०, १२०,......समान विभाग करण्याची रीति विद्यार्थ्यांच्या लक्ष्यांत येईल. म्हणून भूमितिद्वारें वर्तुळांत किंवा वर्तुळा भोंवतीं ह्या संख्यांतून कोणत्याही एका संख्ये इतक्या बाजूंचा नियमित बहुकोण काढतां येईल. परंतु ह्या रीतीनें हव्या तितक्या बाजूंचा नियमित बहुकोण काढतां येत नाहीं; उदाहरणार्थ, भूमितिद्वारा सप्तभुजनियमितबहुकोण काढण्याची रीति माहीत नाहीं.

पुरवणी.

ह्या पुरवणींत दिलेले सिद्धांत भूमितिविषयावर प्रश्नां दाखल उपयोगीं पडतील; कारण, त्यांचीं उपपादनें संक्षिप्त असून, त्यांत मागील सिद्धांतांचा संबंध बहुधा दाखविला नाहीं.

(१). दिलेल्या रेषेचे तीन समान विभाग कर.

अब दिलेल्या रेषेवर अकब समभुज त्रिकोण काढ; कअब व कबअ हे दोन कोन, अफ आणि बफ रेषांनीं अनुक्रमें दुभागून, त्या फ बिंदूंत मिळतात असें मान. फ बिंदूंतून फड, कअ शीं समांतर आणि फई, कब शीं समांतर काढ. म्हणजे अब रेषेचे ड आणि ई बिंदूंत तीन समान विभाग होतील.

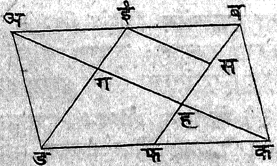


फड, कअ शीं समांतर आहे, आणि अडब त्यांस छेदिते, म्हणून फडब कोन, कअब कोना बराबर आहे. आणि असेंच फईड कोन, कबअ कोना बराबर आहे; ह्यास्तव तिसरा डफई कोन, तिसऱ्या अकब कोना बराबर आहे. परंतु अकब त्रिकोण समभुज आहे, ह्यास्तव डफई त्रिकोणही समभुज आहे, म्हणून डफ, फई, डई ह्या तीन बाजू परस्पर बराबर आहेत.

पुनः डफ, अक शीं समांतर आहे, आणि अफ त्यांस मिळते, म्हणून डफअ कोन, फअक कोना बराबर आहे; पण फअक कोन, फअड कोना बराबर केला आहे; ह्यास्तव डफअ कोन, डअफ कोना बराबर आहे; म्हणून डफ रेष डअ बराबर आहे. असेंच फई, ईब बराबर आहे; पण फड, डई, ईफ ह्या परस्पर बराबर आहेत; म्हणून अड, डई, ईब ह्या परस्पर बराबर आहेत.

(२) जर एका समांतर भुज चौकोनाच्या, समोरा समोरील बाजू दुभागून, द्विभाग बिंदू पासून समोरील कोनां पर्यंत दोन रेषा काढल्या, तर त्यांनीं कर्णरेषेचे तीन समान विभाग होतात.

कर्णाचे तीन समान विभाग हो-
तील.



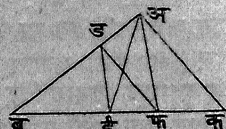
ई बिंदूतून अक शीं ईस समांतर काढ, म्हणजे ती बफ रेघेस स स्थळीं मिळेल.

तेव्हां ईब, अब चें अर्ध आहे, आणि डफ, डक चें अर्ध आहे, म्हणून ईब, डफ बराबर आहे; ह्यास्तव डई आणि फब परस्पर समान आणि समांतर आहेत (१.३३). आणि अईब रेघ ईस आणि अक समांतर रेघांस मिळते; म्हणून बईस कोन, ईअग कोना बराबर आहे. ह्याचकारणास्तव ईबस कोन अईग कोना बराबर आहे. म्हणून अईग आणि ईबस ह्या दोन त्रिकोणांत एकाचे दोन कोन दुसऱ्याच्या दोन कोनां बराबर आहेत, आणि अई बाजू ईब बाजू बराबर आहे; म्हणून अग, ईस बराबर आहे (१.२६). परंतु ईस, गह बराबर आहे; म्हणून अग, गह बराबर आहे. ह्याप्रमाणेंच गह, हक बराबर आहे असें दाखवितां येईल. म्हणून अग, गह, हक ह्या रेघा परस्पर बराबर आहेत.

ह्या रीतीनेंच असें दाखवितां येईल कीं ह आणि स बिंदूंत बफ चे तीन समान विभाग होतात.

(३) त्रिकोणाच्या एका बाजूंत दिलेल्या बिंदू पासून अशी एक रेघ काढ कीं तिनें त्रिकोण दुभागेल.

अबक त्रिकोणाच्या अब बाजूंत दिलेला बिंदु ड आहे. बक बाजू ई मध्यें दुभाग, आणि डई सांध; अ पासून अफ रेघ डई शीं समांतर काढ, आणि डफ सांध; म्हणजे डफ विवक्षित रेघ होईल.

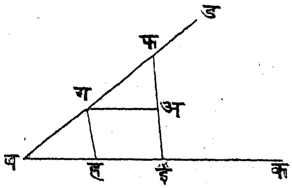


कारण अई सांध. तेव्हां डई, अफ शीं समांतर आहे, ह्यास्तव अडई त्रिकोण डईफ त्रिकोणा बराबर आहे. ह्या प्रत्येकास बडई त्रिकोण मिळीव; म्हणून सगळा बअई त्रिकोण,

णाचें अर्ध आहे ; म्हणून डफ रेघ अबक त्रिकोणास दुभागते.

(४) दोन मिळणाऱ्या रेघांच्या मध्यें दिलेल्या बिंदूपासून अशी एक रेघ काढ कीं ती त्याच बिंदूंत दुभागेल.

ब बिंदूंत मिळणाऱ्या बक, बड रेघांच्या मध्यें अ दिलेला बिंदु आहे. अ बिंदूंतून अग, कब शीं समांतर काढ. गफ, बग बरोबर कर, आणि फअ सांध, आणि ती बक स ई बिंदूंत मिळे पर्यंत वाढीव. फई विवक्षित रेघ होईल.

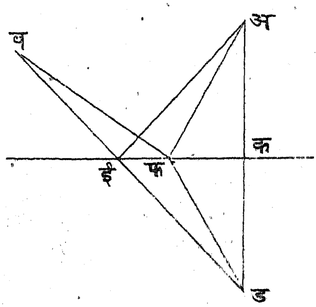


ईफ शीं गह समांतर काढ. तेव्हां अग, हब शीं समांतर आहे, आणि बगफ त्यांस मिळते, म्हणून फगअ कोन, गबह कोना बरोबर आहे. ह्याच कारणास्तव गफअ कोन, बगह कोना बरोबर आहे. म्हणून अगफ आणि हगब ह्या दोन त्रिकोणांत एकाचे दोन कोन दुसऱ्याच्या दोन कोनांशीं अनुक्रमें बरोबर आहेत, आणि फग बाजू गब बाजू बरोबर आहे, ह्यास्तव अफ रेघ हग रेघे बरोबर आहे. आणि अगहई समांतर भुज चौकोनांत गह, अई बरोबर आहे. परंतु गह, अफ बरोबर आहे, म्हणून अफ, अई बरोबर आहे.

(५) एका अमर्याद रेघेंत असा एक बिंदु शोधून काढ कीं त्यापासून त्या रेघेच्या एकाच अंगास दिलेल्या दोन बिंदूंपर्यंत काढलेल्या रेघांची बेरीज लघुतम होईल.

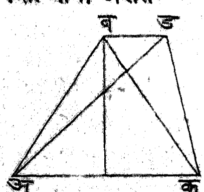
अ आणि ब हे दोन बिंदु दिलेल्या रेघेच्या एकाच अंगास आहेत. अ पासून दिलेल्या रेघेवर अक लंब काढ; आणि अक रेघ वाढवून, कड, अक बरोबर कर. डब सांध, आणि ती दिलेल्या रेघेस ई बिंदूंत छेदिते, तर ई विवक्षित बिंदु होईल.

कारण, दिलेल्या रेषेंत दुसरा क बिंदु घे. तेव्हां अक, डक बराबर आहे, आणि अकई व डकई ह्या दोन त्रिकोणांस ईक साधारण



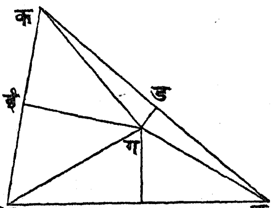
आहे; आणि अकई काटकोन डकई काटकोना बराबर आहे; म्हणून अई, डई बराबर आहे. ह्याप्रमाणेंच अफ, डफ बराबर आहे; आणि डफ आणि फब मिळून, बड पेक्षां अधिक आहेत. म्हणून अफ आणि फब मिळून बड पेक्षां अधिक आहेत; म्हणजे अफ आणि फब ह्यांची बेरीज, डई आणि ईब ह्यांच्या बेरजे पेक्षां अधिक आहे. म्हणून अफ आणि फब ह्यांची बेरीज, अई आणि ईब ह्यांच्या बेरजे पेक्षां अधिक आहे.

(६) एकाच पायावर आणि क्षेत्रफळानें बराबर अशा अनेक त्रिकोणांत समद्विभुज त्रिकोणाची परिमिति (तीन बाजूंची बेरीज) दुसऱ्या कोणत्याही त्रिकोणाच्या परिमिती पेक्षां कमी असते.



अबक समद्विभुज त्रिकोण आहे; आणि अडक दुसरा त्रिकोण त्याच अक पायावर आहे, आणि क्षेत्रफळानें अबक त्रिकोणा बराबर आहे. बड सांध; तर बड रेघ अक रेषेशीं समांतर आहे. आणि अड आणि डक ह्यांची बेरीज, अब आणि बक ह्यांच्या बेरजेपेक्षां अधिक आहे हें मागील सिद्धांतावरून दाखवितां येईल.

(७) त्रिकोणाच्या बाजूंवर त्यांच्या दुभाग बिंदूंपासून काढलेले लंब एकाच बिंदूंत मिळतात.

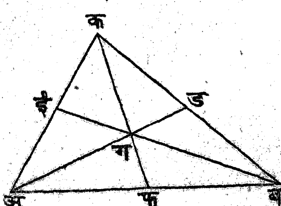


अबक एक त्रिकोण आहे; बक बाजू ड बिंदूंत दुभाग, आणि कअ बाजू ई बिंदूंत दुभाग; ड पासून बक वर लंब काढ, आणि ई पासून कअ वर लंब काढ; आणि हे दोन लंब ग बिंदूंत मिळतात असें समज. तर जी रेघ अब रेघेस दुभागून तीवर लंब आहे, ती ग बिंदूंतून जाते हेंच सिद्ध करावयाचें आहे.

बडग आणि कडग ह्या दोन त्रिकोणांत बग, कग बराबर आहे; आणि कईग आणि अईग ह्या दोन त्रिकोणांत कग, अग बराबर आहे हें सिद्ध करतां येईल; म्हणून बग, अग बराबर आहे. आणि ग बिंदूपासून अब रेघेच्या मध्य बिंदूपर्यंत काढलेली रेघ अब वर लंब आहे हें सहजच सिद्ध करितां येईल. म्हणून जी रेघ अब रेघेस दुभागून तीवर लंब आहे, ती ग बिंदूंतून जाते.

(८) त्रिकोणाच्या बाजूंच्या दुभाग बिंदू पासून समोरील कोनांपर्यंत काढलेल्या रेघा एकमेकींस एकाच बिंदूंत छेदितात.

अबक एक त्रिकोण आहे; बक, ड बिंदूंत, आणि कअ, ई बिंदूंत, आणि अब, फ बिंदूंत दुभाग; बई आणि कफ सांध, आणि त्यांच्या ग छेदनबिंदूपासून अग आणि गड रेघा काढ; तर अग आणि गड एकाच रेघेंत येतील.

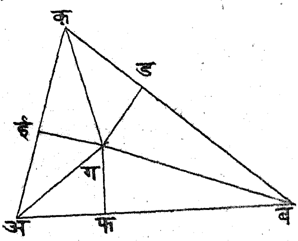


बईअ त्रिकोण बईक त्रिकोणा बराबर आहे, आणि गईअ त्रिकोण गईक त्रिकोणा बराबर आहे (१.३८); म्हणून तिसऱ्या प्रत्यक्षप्रमाणानें बगअ त्रिकोण बगक त्रिकोणा बराबर आहे.

त्रिकोण [illegible] कगअ आणि कगड ह्या दोन त्रिकोणी हे दोन त्रिकोण मिळून, कगअ आणि कगड ह्या दोन त्रिकोणी
बराबर आहेत; म्हणून बगअ आणि बगड हे दोन त्रिकोण मिळून अबक त्रिकोणाच्या अर्धा बराबर आहेत; ह्याकरितां ग बिंदु अड रेघेंत असलाच पाहिजे; म्हणून अग आणि गड ह्या रेघा एकाच रेघेंत आहेत.

(९) **त्रिकोणाचे कोन दुभागणाऱ्या रेघा एकाच बिंदूंतून जातात.**

अबक एक त्रिकोण आहे; त्याचे ब आणि क कोन ग बिंदूंत मिळणाऱ्या रेघांनीं दुभाग; अग सांध; तर अग रेघ अ कोन दुभागील.

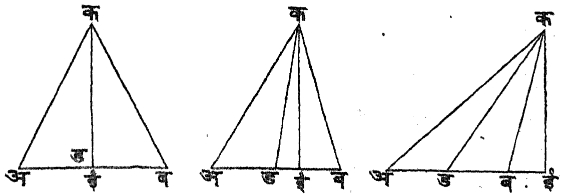


ग पासून बक वर गड लंब, अक वर गई लंब, आणि अब वर गफ लंब काढ. बगफ आणि बगड ह्या त्रिकोणांत गफ, गड बराबर आहे, असें दाखवितां येईल; आणि कगई आणि कगड ह्या त्रिकोणांत गई, गड बराबर आहे हेंही दाखवितां येईल; म्हणून गफ, गई बराबर आहे. आणि अफग आणि अईग ह्या दोन त्रिकोणांत फअग कोन ईअग कोना बराबर आहे हें सहजच ध्यानांत येईल.

वरील रीतीनेंच असें दाखवितां येईल, कीं त्रिकोणाच्या दोन बाजू पायांतून वाढवून, होणारे बाहेरील कोन दुभागले, तर त्या दोन कोन दुभागणाऱ्या रेघा आणि शिरकोन दुभागणारी रेघ एकच बिंदूंत मिळतात.

(१०) **त्रिकोणाच्या दोन बाजूंवरील चौरस, अर्ध्या तिसऱ्या बाजूवरील म्हणजे अर्ध्या पाया वरील दुपट चौरस आणि पायाच्या मध्य-**

बिंदु आणि त्या समोरील कोन म्हणजे शिरकोन ह्यांस सांधणाऱ्या रेघेवरील दुपट चौरस ह्यां बराबर असतात.

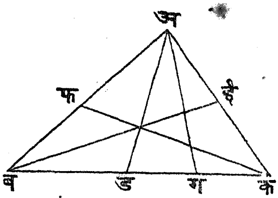


अबक एक त्रिकोण आहे, आणि अब पायाचा ड मध्य बिंदु आहे. पायावर काढलेला कई लंब पायास ई बिंदूंत छेदतो; तर तो ई बिंदु अब रेघेंत येईल अथवा अब रेघेच्या वाढविलेल्या विभागांत येईल.

पहिल्यानें, जेव्हां ई आणि ड बिंदु मिळतात म्हणजे ते वेगळे पडत नाहींत तेव्हां हा सिद्धांत १.४७ पासून सहज सिद्ध होतो.

दुसऱ्यानें, ई आणि ड बिंदु मिळत नाहींत, वेगळे पडतात; तेव्हां अडक आणि बडक ह्या दोन कोनां पैकीं एक कोन विशाळ आणि दुसरा लघु असलाच पाहिजे. अडक कोन विशाळ आहे असें समज. तेव्हां २.१२ प्रमाणें, अक वरील चौरस, अड आणि डक ह्यांवरील चौरस आणि दुपट अड, डई काटकोन चौकोन ह्यां बराबर आहे; आणि २.१३ प्रमाणें बक वरील चौरस आणि दुपट बड, डई काटकोन चौकोन मिळून, बड आणि डक ह्यांवरील चौरसां बराबर आहेत. म्हणून २ प्र. प्र. प्रमाणें अक आणि बक ह्यांवरील चौरस आणि दुपट बड, डई काटकोन चौकोन मिळून, अड आणि डब ह्यांवरील चौरस, आणि दुपट डक वरील चौरस, आणि दुपट अड, डई काटकोन चौकोन ह्यां बराबर आहेत. पण अड, डब बराबर आहे. म्हणून अक आणि बक ह्यांवरील चौरस, अड आणि डक ह्यांवरील दुपट चौरसां बराबर आहेत.

(११) त्रिकोणाच्या प्रत्येक कोना पासून समोरील बाजूंस दुभागणाऱ्या रेघा काढल्या, तर त्या रेघांवरील चौरसांचे बेरजेची चौपट, त्रिकोणाच्या बाजू वरील चौरसांच्या बेरजेच्या तिपटी बराबर होते.



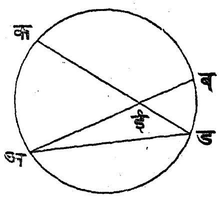
अबक एक त्रिकोण आहे, आणि अड, बई, कफ ह्या रेघा अ, ब, क कोनांपासून समोरील बाजूंच्या ड, ई, फ मध्य बिंदूंपर्यंत काढल्या आहेत. बक वर अग लंब काढ.

तेव्हां अब वरील चौरस, बड आणि डअ ह्यांवरील चौरस आणि दुपट बड, डग काटकोन चौकोन ह्यां बराबर आहे (२.१२); आणि अक वरील चौरस, कड आणि डअ ह्यांवरील चौरसां पेक्षां दुपट कड, डग काटकोन चौकोनानें कमी आहे (२.१३). म्हणून अब आणि अक ह्यां वरील चौरस मिळून, दुपट बड वरील चौरस आणि दुपट अड वरील चौरस ह्यां बराबर आहेत; कारण डक, बड बराबर आहे. आणि अब आणि अक ह्यां वरील चौरसांची दुपट, बक वरील चौरस आणि चौपट अड वरील चौरस ह्यां बराबर आहे; कारण बक, बडची दुपट आहे. ह्याप्रमाणेंच, अब आणि बक ह्यांवरील दुपट चौरस, अक वरील चौरस आणि चौपट बई वरील चौरस ह्यां बराबर आहेत. आणि बक आणि कअ ह्यांवरील दुपट चौरस, अब वरील चौरस आणि चौपट फक वरील चौरस ह्यां बराबर आहेत. म्हणून अब, अक, बक ह्यांवरील चौपट चौरस, अड, बई, कफ, ह्यांवरील चौपट चौरस, आणि अब, अक, बक ह्यांवरील चौरस ह्यांबराबर आहेत; म्हणजे अब, अक, बक ह्यांवरील तिपट चौरस, अड, बई, कफ ह्यांवरील चौपट चौरसां बराबर आहेत.

(२) जर वर्तुळांत दोन ज्या एकमेकीस कापतात, तर त्यांच्या मधील कोनांचें माप त्यांनीं कापलेल्या कौसांची अर्धे बेरीज असते.

वर्तुळांत अब आणि कड ज्या एकमेकीस ई बिंदूंत छेदितात; अड सांध.

तेव्हां अईक कोन, अडई आणि डअई ह्या दोन कोनां



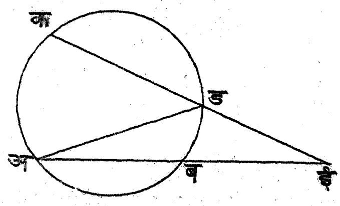
बराबर आहे (१.३२); म्हणजे अक आणि बड कौंसांवरल्या परिघकोनां बराबर आहे. म्हणून अईक कोन, अक आणि बड ह्या दोन कौंसांच्या बेरजे बराबरच्या कौंसावरील परिघकोना बराबर आहे; ह्याकरितां त्या दोन कौंसांच्या अर्ध बेरजे बराबरच्या कौंसावरील मध्य कोना बराबर आहे.

ह्याच प्रमाणें, कईब कोनाचें माप कब आणि अड ह्या दोन कौंसांची अर्धी बेरीज आहे.

(१३) जर वाढविलेल्या दोन ज्या वर्तुळा बाहेर एकमेकीस कापतात, तर त्यांच्या मधील कोनाचें माप त्यांनीं कापलेल्या कौंसांची अर्धी वजाबाकी असते.

अब आणि कड ह्या एका वर्तुळाच्या ज्या आहेत, आणि त्या वाढविल्या असतां, ई बिंदूंत एक दुसरीस कापते; अड सांध.

तेव्हां अडक कोन, ईअड आणि अईड ह्या दोन कोनां बराबर



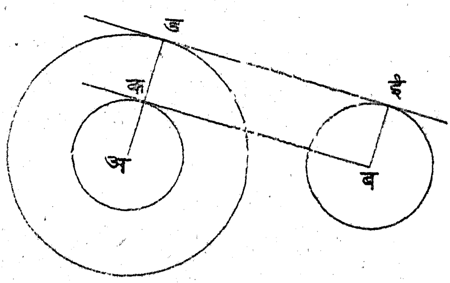
आहे (१.३२). म्हणून अईक कोन, अडक आणि बअड ह्या कोनांच्या वजाबाकी बराबर आहे; म्हणजे तो अक आणि बड ह्या कौंसांच्या वजाबाकी बराबरच्या कौंसावरील परिघकोना बराबर आहे; ह्याकरितां त्या कौंसांच्या अर्ध वजाबाकी वरील मध्य कोना बराबर आहे.

सूचना. वरील दोन सिद्धांत चांगले समजण्यास 'कोनाचें माप' ह्याचा अर्थ समजला पाहिजे. कोनाचे बिंदूपासून हव्या त्या अंतरानें

वर्तुळ काढून, त्या वर्तुळाचा जो कौंस कोनाच्या रेषांच्या मध्यें सांपडतो तो कौंस त्या कोनाचें माप होतो. आतां प्रत्येक वर्तुळाच्या परिघाचे ३६० समान भाग करून, प्रत्येकास **अंश** म्हणतात, आणि प्रत्येक अंशाचे ६० समान भाग करून, प्रत्येकास **कला** म्हणतात. म्हणून कोनाच्या बिंदूपासून कितीही वर्तुळें काढलीं, तरी कोनाच्या रेषांच्या मध्यें सांपडलेले सर्व कौंस अंशादि मापानें समानच असतात, आणि अर्थातच कोनाचें माप एकच राहतें.

(२४) दोन दिलेल्या वर्तुळांस स्पर्श करणारी रेघ काढ.

मोठ्या वर्तुळाचा मध्यबिंदु अ आहे, आणि धाकट्या वर्तुळाचा ब आहे. अ मध्यापासून दिलेल्या वर्तुळांच्या त्रिज्यांच्या अंतरा इतक्या त्रिज्येनें एक वर्तुळ काढ; आणि ब पासून ह्या नव्या वर्तुळास क बिंदूशीं



स्पर्श करणारी बक रेघ काढ. अक सांध, आणि ती बाहेरीलवर्तुळाच्या परिघास ड बिंदूंत मिळे पर्यंत वाढीव. बई त्रिज्या अड शीं समांतर आणि अब च्या एकाच अंगास काढ; आणि डई सांध. म्हणजे डई दोनही वर्तुळांस स्पर्श करील.

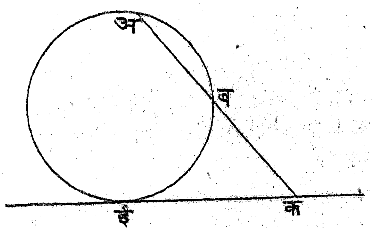
१.३३, १.२९, आणि ३.१६ कुरलरी पाहा.

ब पासून नव्या वर्तुळास स्पर्श करणाऱ्या दोन रेघा काढतां येतात, म्हणून दिलेल्या दोनही वर्तुळांस स्पर्श करणाऱ्या दोन रेघा काढतां येतील; आणि ह्याप्रमाणें काढलेल्या दोनही स्पर्शरेघा ब पासून वा-

दाविलेल्या अब रेषेस एकाच बिंदूंत मिळतात असें सिद्ध करून दाखवितां येईल. दिलेल्या वर्तुळां पैकीं एक दुसऱ्या बाहेर असतें, तेव्हां जी रचना करावी लागते तीच रचना, जेव्हां तीं एकमेकांस कापतात तेव्हांही करावी लागते.

जेव्हां प्रत्येक वर्तुळ दुसऱ्या बाहेर असतें, तेव्हां त्यांस स्पर्श करणाऱ्या आणखी दोन रेषा काढतां येतात. कारण, अ मध्या पासून दिलेल्या दोहों वर्तुळांच्या त्रिज्यांच्या बेरजे इतक्या त्रिज्येनें एक नवें वर्तुळ काढ; आणि पूर्वी प्रमाणेंच कृत्य करून अब च्या दोहों अंगांस बई आणि अड रेषा काढ; म्हणजे दोहों वर्तुळांस स्पर्श करणाऱ्या रेषा निघतील, आणि त्या, वरील प्रमाणेंच, अब स एकाच बिंदूंत छेदतील.

(१९) दिलेल्या रेषेच्या एकाच अंगास असणाऱ्या दोन दिलेल्या बिंदूंतून जाणारें आणि त्या रेषेस स्पर्श करणारें असें एक वर्तुळ काढ.



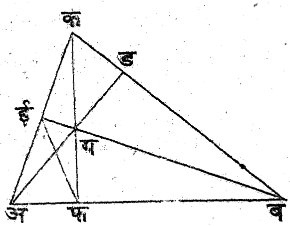
अ आणि ब हे दोन दिलेले बिंदु आहेत; अब सांध, आणि ती दिलेल्या रेषेस क बिंदूंत मिळेपर्यंत वाढीव. अक, कब काटकोन चौकोना बराबर एक चौरस कर (२.१४). आणि दिलेल्या रेषेचा कई तकडा चौरसाच्या एका बाजू बराबर कर. अ, ब, ई बिंदूंतून जाणारें वर्तुळ काढ (४.५); म्हणजे तें विवक्षित वर्तुळ होईल (३.३७).

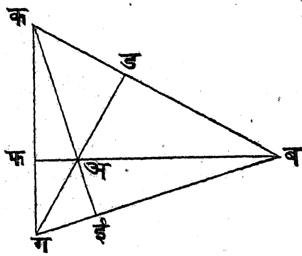
ई बिंदु क च्या दुसऱ्या अंगास घेऊन, वरील प्रमाणें कृति केल्यास दुसरें एक असेंच वर्तुळ निघेल.

परंतु जर अब, दिलेल्या रेषेशीं समांतर आहे, तर ही कृति उपयोगी पडत नाहीं. म्हणून तेव्हां ड बिंदूंत अब दुभाग, आणि ड पासून

अब वर लंब काढून तो दिलेल्या रेघेस क बिंदूंत मिळे पर्यंत वाढीव; आणि अबक बिंदूंतून जाणारें वर्तुळ काढ.

(१६) **त्रिकोणाच्या कोनांपासून समोरील बाजूंवर काढलेले लंब एकाच बिंदूंत मिळतात.**





अबक एक त्रिकोण आहे; आणि प्रथम तो विशालकोण त्रिकोण नाहीं असें समज. ब पासून कअ वर बई लंब काढ; क पासून अब वर कफ लंब काढ, आणि ते ग बिंदूंत मिळतात असें मान. अग सांध, आणि ती बक बाजूस ड बिंदूंत मिळेपर्यंत वाढीव; तर अड रेघ बक रेघेवर लंब होईल.

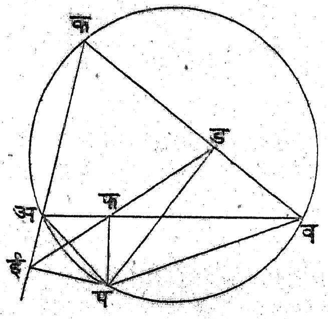
कारण, अईगफ चौकोना भोंवतीं वर्तुळ काढतां येईल (३.२२ टीप); म्हणून फअग कोन फईग कोना बराबर आहे (३.२१); आणि बकईफ चौकोना भोंवतींही वर्तुळ काढतां येईल (३.३१, आणि ३.२१ टीप). म्हणून फईब कोन फकब कोना बराबर आहे. ह्याकरितां बअड कोन, बकफ कोना बराबर आहे. आणि बअड आणि बकफ ह्या दोन त्रिकोणांस ब कोन साधारण आहे; म्हणून तिसरा बडअ कोन दुसऱ्याच्या तिसऱ्या बफक कोना बराबर आहे. परंतु बफक कोन रचनेनें काटकोन आहे; म्हणून बडअ कोन काटकोन आहे.

आतां असें समज, कीं अबक त्रिकोणाचा अ कोन विशाल आहे, आणि ब पासून काढलेला लंब समोरील वाढविलेल्या बाजूस ई बिंदूंत मिळतो, आणि क पासून काढलेला लंब समोरील वाढविलेल्या बाजूस

फ बिंदूंत मिळतो, आणि बई व कफ ह्या रेघा ग बिंदूंत मिळतात. बकग त्रिकोणांत बफ आणि कई हे लंब अ बिंदूंत मिळतात; म्हणून वरील सिद्धते प्रमाणें गअ वाढविली असतां ती बक वर लंब होईल.

(१७) जर त्रिकोणा भोंवतीं काढलेल्या वर्तुळाच्या परिघांतल्या एक बिंदू पासून त्रिकोणाच्या बाजूंवर लंब काढले, तर त्यांचे छेदनबिंदु एकाच रेघेंत असतात.

अबक एक त्रिकोण आहे, आणि त्या भोंवतीं काढलेल्या वर्तुळांतील



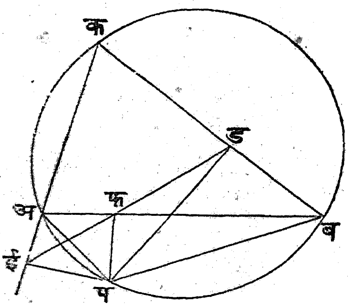
प बिंदूपासून बक, कअ, अब बाजूंवर अनुक्रमें पड, पई, पफ लंब काढले आहेत; तर ड, ई, फ बिंदु एकाच रेघेंत येतील.

(वरील आकृतींत क कोन ज्या कौंसावर आहे त्यांत प बिंदु आहे, आणि ई बिंदु कअ च्या वाढविलेल्या भागांत आहे; ह्या आकृतींत बदल झाल्यानें उपपादनांत थोडासा फेर करावा लागेल).

पईअफ भोंवतीं वर्तुळ निघेल (३.२२ टीप); म्हणून पफई कोन पअई कोना बराबर आहे (३.२१). परंतु पअई आणि पअक हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बराबर आहेत (१.१३); आणि पअक आणि पबक हेही दोन कोन दोन काटकोनां बराबर आहेत. (३.२२).

म्हणून पअई कोन पबक कोना बराबर आहे; म्हणून पफई कोन पबक कोना बराबर आहे.

पुनः, पफडब भोंवतीं वर्तुळ निघेल (टीप ३.२१); म्हणून पफड



आणि पबड हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बरोबर आहेत (३.२२). परंतु पबड कोन पफई कोना बरोबर आहे, असें वर दाखविलें आहे, ह्याकरितां पफड आणि पफई हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बरोबर आहेत. ह्यास्तव ईफ आणि फड ह्या रेघा एकाच रेषेंत आहेत. (१.१४).

युक्लिडकृत भूमितीवर प्रश्न.

१. १—१५.

१. दिलेल्या रेषेवर असा एक समद्विभुज त्रिकोण काढ, कीं त्याची प्रत्येक बाजू दिलेल्या रेषे बरोबर होईल.

२. १.२ च्या आकृतींत, जर धाकट्या वर्तुळाचा व्यास मोठ्या वर्तुळाच्या त्रिज्ये बराबर आहे, तर दिलेला बिंदु आणि काढलेल्या त्रिकोणाचा शिरकोन ह्यांचीं स्थानें कोठें येतील तें दाखीव.

३. जर दोन रेघा एकमेकीस दुभागून एकमेकीवर लंब आहेत, तर त्यांतील एकींतला कोणताही बिंदु दुसरीच्या शेवटां पासून समान अंतरावर असतो.

४. जर समद्विभुज त्रिकोणाचे पाया कडील अबक आणि अकब हे दोन कोन बड आणि कड रेषांनीं दुभागले, तर डबक त्रिकोण समद्विभुज होतो असें सिद्ध कर.

५. बअक त्रिकोणाचा ब कोन अ कोनाची दुपट आहे. आता जर बड रेघ ब कोनाचे दोन समान भाग करून अक रेघेस ड मध्यें मिळते तर बड, अड बराबर आहे असें सिद्ध कर.

६. १.५ च्या आकृतींत जर फक आणि बग ह्या रेघा ह बिंदूंत मिळतात, तर फह आणि गह परस्पर बराबर आहेत असें सिद्ध कर.

७. १.५ च्या आकृतींत, जर फक आणि बग ह्या रेघा ह बिंदूंत मिळतात, तर अह रेघ बअक कोनास दुभागते हें दाखीव.

८. अबकड चौकोनाच्या अब आणि अड बाजू परस्पर बराबर आहेत, आणि अक कर्ण बअड कोनाचे दोन समान भाग करितो; तर कब आणि कड बाजू बराबर आहेत, आणि अक कर्ण बकड कोनाचे दोन समान भाग करितो हें दाखीव.

९. अब रेघेच्या एकाच अंगास असणाऱ्या अकब आणि अडब ह्या दोन त्रिकोणांत अक, बड बराबर आहे, आणि अड, बक बराबर आहे, आणि अड आणि बक रेघा ओ बिंदूंत छेदितात; तर अओब त्रिकोण समद्विभुज आहे असें दाखीव.

१०. समभुज चौकोनाचे समोरा समोरील कोन परस्पर बराबर असतात.

११. समभुज चौकोनाचा कर्ण ज्या कोनांतून जातो त्यांतील प्रत्येक कोनास तो दुभागतो.

१२. जर एकाच पायावर दोन समद्विभुज त्रिकोण आहेत, तर त्यांचे शिरकोन सांधणारी रेघ किंवा सांधून वाढविलेली रेघ पायाचे दोन समान भाग करून त्यावर लंब होते.

१३. दिलेल्या रेषेंत असा एक बिंदु काढ, कीं तो दोन दिलेल्या बिंदूंपासून समान अंतरावर होईल.

१४. दिलेल्या रेषेच्या दोन्ही अंगांस दिलेल्या दोन बिंदूंतून अशा दोन रेघा काढ कीं त्या, दिलेल्या रेषेस एकाच बिंदूंत मिळून त्यांच्या मधील कोन दिलेल्या रेषेनें दुभागेल.

१५. जर एक दिलेला **बअक** कोन दुभागला; आणि **कअ** रेघ **ग** बिंदू पर्यंत वाढवून, **बअग** कोनही दुभागला, तर दुभागणाऱ्या रेघा एकमेकींवर लंब होतात.

१६. जर चार रेघा एकाच बिंदूंत मिळून, समोरा समोरील कोन परस्पर बराबर करितात, तर त्यांतून दोन दोन रेघा एकाच रेषेंत असतात.

१. १६—२६.

१७. **अबक** त्रिकोणाचा **अ** कोन दुभागणारी रेघ **बक** बाजूस **ड** मध्यें मिळते; तर **बअ**, **बड** पेक्षां अधिक आहे, आणि **कअ**, **कड** पेक्षां अधिक आहे हें दाखीव.

१८. १.१७ च्या आकृतींत, **अ** बिंदु आणि **बक** रेषेंतला कोणताही बिंदु सांधून, असें सिद्ध कर कीं **अबक** आणि **अकब** हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनांहून कमी आहेत.

१९. **अबकड** चौकोनाची **अड** बाजू चारही बाजूंत मोठी आहे, आणि **बक** लहान आहे; तर **अबक** कोन **अडक** कोना पेक्षां मोठा आहे, आणि **बकड** कोन **बअड** कोना पेक्षां मोठा आहे असें दाखीव.

२०. जर चौरसाच्या कोणत्याही **अ** बिंदूंतून काढलेली रेघ, समो-

रील एक बाजूस छेदून, वाढविलेल्या दुसऱ्या बाजूस फ बिंदूंत मिळते, तर अफ रेघ चौरसाच्या कर्णापेक्षां मोठी आहे असें दाखीव.

२१. दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या रेघेपर्यंत ज्या अनेक रेघा काढतां येतात त्यांत लंब रेघ लहान असते; आणि दुसऱ्या रेघां पैकीं जी रेघ लंबा जवळ असते, ती दूरच्या रेघेपेक्षां मोठी असते; आणि दिलेल्या बिंदूपासून दिलेल्या रेघेवर लंबाच्या प्रत्येक बाजूस एकेक अशा दोनच समान रेघा काढतां येतात.

२२. कोणत्याही बिंदूपासून त्रिकोणाच्या तीन कोनांपर्यंत काढलेल्या रेघांची बेरीज, त्रिकोणाच्या तीनही बाजूंच्या अर्धबेरजे पेक्षां अधिक असते.

२३. चौकोनाच्या चार बाजूंची बेरीज दोन्ही कर्णांच्या बेरजेपेक्षां अधिक असते.

२४. त्रिकोणाच्या दोन बाजू मिळून, तिसऱ्या बाजूच्या मध्य बिंदू-पासून शिरकोनापर्यंत काढलेल्या दुपट रेघेपेक्षां अधिक असतात.

२५. जर त्रिकोणाचा एक कोन दुसऱ्या दोन कोनांच्या बेरजे बराबर आहे, तर त्या त्रिकोणाचे दोन समद्विभुज त्रिकोण करितां येतात.

२६. जर त्रिकोणाचा क कोन अ आणि ब ह्या दोन कोनांच्या बेरजेबराबर आहे, तर अब रेघ, क आणि अब चा मध्य बिंदु सांध-णाऱ्या रेघेच्या दुपट असते.

२७. त्रिकोणाचा पाया, आणि पायाकडील एक कोन, आणि दुसऱ्या दोन बाजूंची बेरीज हीं दिलीं असतां, त्रिकोण काढ.

२८. त्रिकोणाच्या कोणत्याही कोनास दुभागणाऱ्या रेघेंतल्या बिंदू-पासून त्या कोनाच्या बाजूंवर लंब काढले असतां, ते परस्पर बराबर होतात.

२९. दिलेल्या रेघेंत असा एक बिंदु काढ, कीं त्यापासून दुसऱ्या दोन दिलेल्या रेघांवर लंब काढले असतां, ते परस्पर बराबर होतील.

३०. दिलेल्या बिंदूपासून अशी एक रेघ काढ, कीं तीवर दुसऱ्या दोन दिलेल्या बिंदूंपासून काढलेले लंब तिच्या दोहों अंगांस पडून, ते परस्पर बराबर होतील.

३१. अबक त्रिकोणाचा अ कोन दुभागणाऱ्या रेषेवर ब बिंदूपासून बड लंब काढून, तो अक किंवा वाढविलेल्या अक रेषेस ई बिंदूंत मिळतो; तर बड, डई बराबर आहे असें दाखीव.

३२. अब आणि अक रेषा अ बिंदूंत मिळतात; तर कोणत्याही प बिंदूंतून अब आणि अक रेषांस ई आणि फ बिंदूंत मिळणारी अशी एक रेघ काढ, कीं अई, अफ बराबर होईल.

३३. दोन काटकोन त्रिकोणांचे कर्ण परस्पर बराबर आहेत, आणि एकाची एक बाजू दुसऱ्याच्या एका बाजू बराबर आहे; तर ते त्रिकोण सर्वांशीं बराबर आहेत असें दाखीव.

१. २७—३१.

३४. समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायाशीं समांतर काढलेली रेघ, त्या त्रिकोणाचे बाजूंशीं समान कोन करिते.

३५. जर अ आणि ब ह्या दोन मिळणाऱ्या रेघा क आणि ड ह्या दोन मिळणाऱ्या रेघांशीं समांतर आहेत, तर अ आणि ब ह्यांच्या मधील कोन, क आणि ड ह्यांच्या मधील कोना बराबर असतो हें सिद्ध कर.

३६. दोन समांतर रेघांवर जिचीं टोंकें आहेत अशा रेघेच्या मध्यबिंदूंतून दुसरी एक रेघ काढून, ती त्या समांतर रेघांस मिळेपर्यंत वाढली, तर ती दुसरी रेघ पहिल्या रेघेच्या मध्य बिंदूंत दुभागते.

३७. दोन समांतर रेघांपासून समान अंतरावर असणाऱ्या एका बिंदूंतून समांतर रेघांस कापणाऱ्या दोन रेघा काढल्या, तर त्यांनीं कापलेले समांतर रेघांचे भाग परस्पर बराबर असतात.

३८. जर त्रिकोणाचा बाहेरील कोन दुभागणारी रेघ, आंतील कोनासमोरील बाजूशीं समांतर आहे, तर तो त्रिकोण समद्विभुज आहे असें दाखीव.

३९. दिलेल्या कड रेघेंत असा एक ब बिंदु काढ, कीं जर दिलेल्या अ बिंदूपासून ब बिंदूपर्यंत अब रेघ काढली, तर अबक कोन दिलेल्या कोना बराबर होईल.

४०. जर त्रिकोणाचा कोणताही कोन दुभागणारी रेघ समोरील बाजूस मिळेपर्यंत वाढविली, आणि छेदनबिंदूपासून त्या त्रिकोणाच्या बाजूंशीं समांतर, व ज्यांचीं टोंकें त्या बाजूंवर आहेत अशा रेघा काढल्या, तर त्या रेघा परस्पर बराबर होतात.

४१. **अबक** त्रिकोणाची **बक** बाजू **ड** बिंदूपर्यंत वाढविली आहे, आणि **अकब** कोनास दुभागणारी **कई** रेघ **अब** रेघेस **ई** बिंदूंत मिळते. **ई** बिंदूंतून **बक** शीं समांतर काढलेली रेघ, **अक** रेघेस **फ** बिंदूंत मिळते, आणि बाहेरील **अकड** कोनास दुभागणारे रेघेस **ग** बिंदूंत मिळते, तर **ईफ**, **फग** बराबर आहे असें दाखीव.

४२. **अबक** काटकोन त्रिकोणाचा **अब** कर्ण आहे; **अब** मध्यें असा एक **ड** बिंदु काढ कीं **ड** पासून **अक** वर काढलेला लंब, **डब** बराबर होईल.

४३. **अबक** समद्विभुज त्रिकोणाच्या **अब**, **अक** समान बाजूंन असे **ड** आणि **ई** बिंदु काढ कीं **बड**, **डई**, **ईक** ह्या रेघा परस्पर बराबर होतील.

४४. **अबक** समद्विभुज त्रिकोणाचे **बक** पायावर लंब काढलेली रेघ, **अब** बाजूस **ड** बिंदूंत कापते, आणि वाढविलेल्या **कअ** बाजूस **ई** बिंदूंत मिळते; तर **अईड** त्रिकोण समद्विभुज आहे असें दाखीव.

१. ३२.

४५. समद्विभुज त्रिकोणाच्या पायाच्या टोंकांपासून समोरील बाजूंवर लंब काढले आहेत; तर पायाशीं लंबांनीं झालेले कोन, प्रत्येकीं शिरकोनाच्या निमे आहेत असें दाखीव.

४६. **अबक** त्रिकोणाच्या बाजूंवर आणि त्यांच्या बाहेरील अंगांस **बकड**, **कअई**, **अबफ** तीन समभुज त्रिकोण काढले आहेत; तर **अड**, **बई**, **कफ** रेघा परस्पर बराबर आहेत असें दाखीव.

४७. समभुज व समकोण अष्टकोणाच्या प्रत्येक कोनाचें माप काय असतें म्हणजे त्यांत किती अंश असतात?

४८. दिलेल्या दोन बिंदूंतून दिलेल्या रेघेस कापून मिळणाऱ्या अशा दोन रेघा काढ, कीं त्यांनीं दिलेल्या रेघेशीं झालेला त्रिकोण समभुज होईल.

४९. जर समभुज त्रिकोणाच्या पायाकडील कोनांस दुभागणाऱ्या रेषा मिळत पर्यंत वाढविल्या, तर त्यांच्या मधील कोन, पाया वाढवून होणाऱ्या त्रिकोणाच्या बाहेरील कोना बरोबर होतो.

५०. **अबक** समद्विभुज त्रिकोणाचा **अ** शिरकोन आहे; **बअ** बाजू **ड** पर्यंत वाढविली आहे, आणि **अड**, **बअ** बरोबर करून **डक** सांधली आहे; तर **बकड** काटकोन आहे असें दाखीव.

५१. **अबक** त्रिकोणाचे बाहेरील **ब** आणि **क** कोन दुभागणाऱ्या **बड**, **कड** रेषा **ड** स्थळीं मिळतात; तर **बडक** कोन आणि अर्धा **बअक** कोन मिळून एक काटकोन आहे असें दाखीव.

५२. जर त्रिकोणाचा एक कोन दुसऱ्या दोन कोनांच्या बेरजेपेक्षां अधिक किंवा बेरजे बरोबर किंवा बेरजेहून लहान आहे, तर तो कोन विशाळ कोन अथवा काटकोन अथवा लघुकोन असतो असें दाखीव.

५३. असा एक समद्विभुज त्रिकोण काढ, कीं त्याचा शिरकोन पायाकडील प्रत्येक कोनाची चौपट होईल.

५४. **अबक** त्रिकोणांत **बक** बाजू **ई** बिंदूंत, आणि **अब** बाजू **ग** बिंदूंत दुभागली आहे; आणि **अई**, **फ** पर्यंत वाढवून **ईफ**, **अई** बरोबर केली आहे, आणि **कग**, **ह** पर्यंत वाढवून **गह**, **कग** बरोबर केली आहे; तर **फब** आणि **हब** एकाच रेषेंत आहेत असें दाखीव.

५५. असा एक समद्विभुज त्रिकोण काढ, कीं त्याच्या पायाकडील प्रत्येक कोनाचा तिसरा भाग शिरकोनाच्या अर्धा बरोबर होईल.

५६. **अब** आणि **अक** ह्या दोन दिलेल्या रेषांत **ब** आणि **क** दोन बिंदु असे काढ, कीं **अब** आणि **बक** मिळून, तिसऱ्या एका दिलेल्या रेषे बरोबर होऊन, त्यांच्या मधील कोन दिलेल्या कोना बरोबर होईल.

५७. १.५ चे आकृतींत जर **कबग** आणि **फकब** हे कोन प्रत्येकीं **अबक** अथवा **अकब** कोनाचा एक तृतीयांश आहेत, आणि **बग** आणि **कफ** रेषा **म** बिंदूंत छेदितात, तर असें सिद्ध कर कीं **बमक**, **बमफ**, आणि **कमग** हे त्रिकोण प्रत्येकीं समद्विभुज आहेत.

५८. **अईब** आणि **कईड** रेषा एकमेकीस **ई** बिंदूंत छेदितात, आणि

अकई आणि बईड हे त्रिकोण अक आणि बड रेषांनीं झाले आहेत; आणि अकई व डबई हे दोन कोन दुभागणाऱ्या रेषा फ बिंदूंत मिळतात, तर असें दाखीव, कीं कफब कोन, ईअक आणि ईडब ह्या दोन कोनांच्या बेरजेच्या अर्धा बरावर आहे.

५९. काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णाचा मध्य बिंदु आणि काटकोन बिंदु हे सांधणारी रेघ अर्धकर्णा बरावर असते.

६०. अबक त्रिकोणाच्या अ कोनापासून समोरील बाजूवर काढलेला लंब त्या बाजूस अथवा तिला वाढविल्यानें ड बिंदूंत मिळतो; आणि ब कोनापासून समोरील बाजूवर काढलेला लंब त्या बाजूस अथवा ती वाढविल्यानें ई बिंदूंत मिळतो; तर असें दाखीव कीं ड आणि ई ह्यांपासून अब च्या मध्य बिंदू पर्यंत काढलेल्या रेषा परस्पर बरावर आहेत.

६१. त्रिकोणाच्या पायाकडील कोनांपासून समोरील बाजूंवर अथवा त्या वाढवून त्यांवर लंब काढले आहेत; तर ते छेदनबिंदु सांधणाऱ्या रेषेवर पायाच्या मध्य बिंदूपासून काढलेल्या लंबानें तिचे दोन समान विभाग होतात असें दाखीव.

६२. जर १.१ च्या आकृतींत, काढलेल्या वर्तुळांचे छेदनबिंदु क आणि ह आहेत, आणि अब रेघ एका वर्तुळास स बिंदूंत मिळे पर्यंत वाढविली; तर कहस त्रिकोण समभुज आहे असें दाखीव.

६३. समद्विभुज त्रिकोणाचे पायाकडील कोन दुभागणाऱ्या रेषा समोरील बाजूंस ड आणि ई बिंदूंत मिळतात; तर डई, पायाशीं समांतर आहे असें दाखीव.

६४. अब आणि अक ह्या दोन दिलेल्या रेषा आहेत, आणि अब रेषेंत दिलेला प बिंदु आहे; तर प पासून अक रेषेस ड बिंदूंत मिळणारी अशी एक रेघ काढ कीं अपड कोन अडप कोनाची तिपट होईल.

६५. कर्ण आणि दुसऱ्या दोन बाजूंची बेरीज हीं दिलीं असतां, काटकोन त्रिकोण काढ.

६६. कर्ण आणि दुसऱ्या दोन बाजूंच्या मधील अंतर हीं दिलीं असतां, काटकोन त्रिकोण काढ.

६७. कर्ण आणि त्यावर काटकोनापासून काढलेला लंब हे दिले असतां, काटकोन त्रिकोण काढ.

६८. तीन बाजूंची बेरीज आणि एक कोन हीं दिलीं असतां, काटकोन त्रिकोण काढ.

६९. काटकोनाचे तीन समान भाग कर.

७०. दिलेल्या समर्याद रेषेचे तीन समान भाग कर.

७१. दिलेल्या बिंदूपासून दोन समांतर रेषांपर्यंत समान आणि एकमेकीस लंब अशा दोन रेषा काढ.

७२. असा एक त्रिकोण काढ कीं त्याच्या बाजूंची परिमिति (बेरीज) दिलेल्या रेषेबराबर होऊन, त्याचे कोन दिलेल्या त्रिकोणाच्या कोनां बराबर होतील.

१. ३३—३४.

७३. जर एका चौकोनाच्या समोरा समोरील दोन बाजू समांतर आहेत, आणि दुसऱ्या समोरा समोरील दोन बाजू समान आहेत पण समांतर नाहींत; तर त्या चौकोनाचे समोरा समोरचे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बराबर असतात.

७४. जर दोन समान परंतु समांतर नसणाऱ्या रेषांचीं एकाच अंगचीं टोंकें सांधणारी रेघ त्यांशीं एकाच अंगचे कोन समान करिते, तर त्या दोन रेषांचीं दुसऱ्या अंगचीं टोंकें सांधणारी रेघ प्रथम रेघेस समांतर होते.

७५. त्रिकोणाच्या पायाकडील टोंकांपासून समोरील बाजूं पर्यंत काढलेल्या दोन रेषा एकमेकीस कधींही दुभागीत नाहींत.

७६. ज्या चौकोनाच्या समोरा समोरील बाजू बराबर असतात तो समांतरभुज चौकोन असतो.

७७. जर चौकोनाचे समोरा समोरील कोन बराबर आहेत, तर तो समांतरभुज चौकोन असतो.

७८. समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परास दुभागितात.

७९. जर चौकोनाचे कर्ण परस्परास दुभागितात, तर तो समांतरभुज चौकोन असतो.

८०. जर समांतरभुज चौकोनाचे समोरासमोरील कोन सांधणारी रेघ त्या कोनांचे समान भाग करिते, तर त्या समांतरभुज चौकोनाच्या चारही बाजू परस्पर समान असतात.

८१. दिलेल्या बिंदूतून अशी एक रेघ काढ, कीं दिलेल्या दोन समांतर रेघांच्या मधील तिचा भाग दिलेल्या लांबीचा होईल.

८२. समांतरभुज चौकोनाचे जवळजवळचे कोन दुभागणाऱ्या रेघा एकमेकींवर लंब असतात.

८३. जर समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्पर बराबर आहेत, तर त्याचे सर्व कोनही परस्पर बराबर असतात.

८४. असा एक बिंदु काढ कीं त्यापासून दोन दिलेल्या रेघांवर काढलेले लंब, दोन दिलेल्या रेघांशीं अनुक्रमें बराबर होतील. असे बिंदु किती आहेत?

८५. अशी एक रेघ काढ कीं तिचीं टोकें दिलेल्या दोन रेघांवर येऊन, ती दिलेल्या एका रेघेशीं समान, आणि दुसऱ्या एका रेघेशीं समांतर होईल.

८६. **अबकड** समांतरभुज चौकोनाच्या **अब**, **बक**, आणि **कड** ह्या बाजूंवर समभुज त्रिकोण काढले आहेत. **बक** वर काढलेला समभुज त्रिकोण समांतरभुज चौकोनाच्याच अंगास आहे, आणि **अब** आणि **कड** ह्यांवरील काढलेले समभुज त्रिकोण दुसऱ्या अंगास आहेत; तर असें दाखीव कीं **बक** वरील त्रिकोणाच्या शिरकोनापासून **अब** आणि **कड** ह्यांवरील काढलेल्या त्रिकोणांच्या शिरकोनांचीं अंतरें अनुक्रमें समांतरभुज चौकोनाच्या दोहों कर्णांबराबर असतात.

८७. जर समांतरभुज चौकोनाच्या जवळजवळच्या बाजूंच्या मधील कोन, बाजू न बदलतां वाढविला, तर त्या बाजूंच्या छेदनबिंदूंतून जाणारा कर्ण कमी होतो.

८८. **अ**, **ब**, **क** हे तीन बिंदु एकाच रेघेंत असे आहेत, कीं **अब**, **बक** बराबर आहे; तर **अ** आणि **क** ह्यांमधून न जाणाऱ्या रेघेवर **अ** आणि **क** ह्यांपासून काढलेल्या लंबांची बेरीज, **ब** पासून त्याच रेघेवर काढलेल्या लंबाच्या दुपटी बराबर असते.

८९. समांतरभुज चौकोनाच्या कोनांपासून, चौकोना बाहेरील

एका रेषेवर लंब काढले, तर समोरा समोरील कोनांच्या एका जोडी-पासून काढलेल्या लंबांची बेरीज समोरासमोरील कोनांच्या दुसऱ्या जोडीपासून काढलेल्या लंबांच्या बेरजे बराबर असते.

९०. जर एका षट्कोणाकृतीच्या समोरासमोरील बाजू बराबर आणि समांतर आहेत, तर समोरासमोरील कोन सांधणाऱ्या तीन रेषा एकाच बिंदूंत मिळतात.

९१. **अब** आणि **अक** ह्या दोन दिलेल्या रेषा आहेत; तर त्यांच्या मधील दिलेल्या **ई** बिंदूपासून अशी एक **गईह** रेष काढ कीं त्या दोन रेषांच्या मधील तिचा **गह** भाग **ई** बिंदूंत दुभागेल.

९२. दिलेल्या समांतरभुज चौकोनांत असा एक रांबस काढ कीं त्या रांबसाचा एक कोनबिंदु, समांतरभुज चौकोनाच्या बाजूंत दिलेल्या बिंदूमध्यें येईल.

९३. **अबकड** एक समांतरभुज चौकोन आहे, आणि **ई** आणि **फ** हे **अड** आणि **बक** बाजूंचे मध्यबिंदु आहेत; तर असें दाखीव कीं **बई** आणि **डफ** ह्या रेषा **अक** कर्णाचे तीन समान विभाग करितात.

१. ३५—४५.

९४. **अबकड** चौकोनाची **बक** बाजू **अड** बाजूशीं समांतर आहे; तर असें दाखीव कीं **डक** च्या मध्य बिंदूंतून **अब** शीं समांतर काढ-लेल्या रेषेनें झालेला समांतरभुज चौकोन, क्षेत्रफळानें **अबकड** चौ-कोना बराबर आहे.

९५. **अबकड** चौकोनाची **बक** बाजू **अड** बाजूशीं समांतर आहे, आणि **डक** चा **ई** मध्यबिंदु आहे; तर असें दाखीव कीं **अईब** त्रिकोण त्या चौकोनाचें अर्ध आहे.

९६. असें दाखीव कीं समांतरभुज चौकोनाच्या कोणत्याही एका कर्णाच्या मध्य बिंदूंतून समोरासमोरील दोहों बाजूं पर्यंत काढलेल्या रेषेनें समांतरभुज चौकोन दुभागतो.

९७. समांतरभुज चौकोनांत दिलेल्या बिंदूपासून अशी एक रेष काढ कीं तिनें तो दुभागेल.

९८. दिलेल्या समांतरभुज चौकोना बराबर एक रांबस काढ.

९९. जर दोन त्रिकोणांत एकाच्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या दोन बाजूंशीं अनुक्रमें बराबर आहेत, आणि त्या बाजूंच्या मधील दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनां बराबर आहे; तर ते दोन त्रिकोण क्षेत्रफळानें बराबर असतात.

१००. अबकड समांतरभुज चौकोन दुभागणारी ईफ रेघ अड बाजूस ई बिंदूंत, आणि बक बाजूस फ बिंदूंत मिळते; तर ईबफ आणि कईड हे त्रिकोण परस्पर बराबर आहेत असें दाखीव.

१०१. समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णांनीं त्यांत झालेले चार त्रिकोण क्षेत्रफळानें परस्पर बराबर असतात.

१०२. अब आणि कड ह्या दोन रेघा एकमेकींस ई बिंदूंत छेदितात, आणि अईक त्रिकोण बईड त्रिकोणा बराबर आहे; तर बक, अड शीं समांतर आहे असें दाखीव.

१०३. अबकड समांतरभुज चौकोनाच्या बड कर्णांतल्या एका प बिंदू पासून पअ, पक रेघा काढल्या आहेत; तर पअब आणि पकब हे त्रिकोण परस्पर बराबर आहेत असें दाखीव.

१०४. त्रिकोणाच्या दोन बाजूंचे मध्यबिंदु सांधणारी रेघ तिसऱ्या बाजूशीं समांतर असते.

१०५. चौकोनाच्या जवळजवळच्या बाजूंचे मध्यबिंदु सांधणाऱ्या रेघांनीं झालेला चौकोन समांतरभुज असतो.

१०६. ड आणि ई हे एका त्रिकोणाच्या अब आणि अक बाजूंचे मध्यबिंदु आहेत; आणि कड आणि बई रेघा एकमेकींस फ बिंदूंत छेदितात; तर बफक त्रिकोण अडफई चौकोना बराबर आहे असें दाखीव.

१०७. त्रिकोणाच्या दोन बाजू दुभागणारी रेघ पायाच्या अर्धा बराबर असते.

१०८. अबक त्रिकोणाच्या अक पायांत एक ड बिंदु घे; अड, डक, अब, बक ह्या रेघा ई, फ, ग, ह बिंदूंत अनुक्रमें दुभाग; तर ईग, फह शीं समान आणि समांतर आहे असें दाखीव.

१०९. त्रिकोणाच्या बाजूंचे मध्यबिंदु दिले असतां, तो त्रिकोण काढ.

११०. त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंचे मध्यबिंदु सांधणाऱ्या रेषेनें कापलेला त्रिकोण सगळ्या त्रिकोणाचा चतुर्थांश असतो.

१११. **अबक** त्रिकोणाच्या **अब**, **अक** बाजू **ई** आणि **फ** बिंदूंत दुभागल्या आहेत; आणि **अ** पासून समोरील बाजूवर काढलेला लंब त्या बाजूस **ड** बिंदूशीं मिळतो. तर **फडई** कोन **बअक** कोनाबरोबर आहे, आणि **अफडई** चौकोन, **अबक** त्रिकोणाचें अर्धे आहे असें दाखीव.

११२. क्षेत्रफळानें बरोबर असे दोन त्रिकोण एकाच पायावर, पण त्याच्या निरनिराळ्या अंगांस आहेत; तर त्यांचे शिरकोन सांधणारी रेघ पायानें अथवा वाढविलेल्या पायानें दुभागते असें दाखीव.

११३. सर्वांशीं बरोबर असे तीन समांतरभुज चौकोन एकाच रेषेंत असणाऱ्या समान पायांवर आणि एकमेकांस लागून आहेत. पहिल्या समांतरभुज चौकोनाच्या पायाचीं टोंकें तिसऱ्याच्या पाया समोरील बाजूच्या टोंकांशीं एकाच अंगानें सांधलीं आहेत, तर नव्या समांतर भुज चौकोनाचा, मधल्या समांतरभुज चौकोनांस सांपडलेला भाग, क्षेत्रफळानें कोणत्याही एका समांतरभुज चौकोनाचें अर्धे आहे असें दाखीव.

११४. **अबकड** एक समांतरभुज चौकोन आहे; **ड** पासून **बक** स **फ** बिंदूंत आणि **अब** च्या वाढविलेल्या भागास **ग** बिंदूंत मिळणारी अशी एक **डफग** रेघ काढिली आहे; तर **अफ** आणि **कग** सांधल्यानें, **अबफ** त्रिकोण **कफग** त्रिकोणा बरोबर होतो असें दाखीव.

१. ४६—४८.

११५. जर एका **प** बिंदूपासून काटकोन चौकोनाच्या **अ**, **ब**, **क**, **ड** ह्या चार कोनबिंदू पर्यंत रेघा काढल्या; तर **पअ** आणि **पक** ह्यांवरील चौरस मिळून, **पब** आणि **पड** ह्यांवरील चौरसां बरोबर होतात.

११६. जर काटकोन त्रिकोणांत काटकोना जवळच्या एका बाजूवरील चौरस दुसऱ्या बाजूवरील चौरसाची तिपट आहे; तर काटकोना पासून कर्णाच्या मध्य बिंदू पर्यंत एक आणि त्यावर लंब एक अशा दोन रेघा काढल्या असतां, त्यांनीं काटकोनाचे तीन समान विभाग होतात.

११७. **अबक** त्रिकोणाचा **अ** काटकोन आहे, आणि **बई** आणि **कफ** रेघा समोरील बाजूंस दुभागितात, तर असें दाखीव कीं **बई** आणि **कफ** ह्यांवरील चौरसांचे बेरजेची चौपट, **बक** वरील चौरसाच्या पांचपटी बराबर आहे.

२. १—११.

११८. २.११ च्या आकृतींत, जर **कह** रेघ **बफ** रेघेस **ल** बिंदूंशीं मिळेपर्यंत वाढविली, तर **कल**, **बफ** वर लंब आहे असें दाखीव.

११९. २.११ च्या आकृतींत, जर **बई** आणि **कह**, **ओ** बिंदूशीं मिळतात, तर **अओ**, **कह** वर लंब आहे असें दाखीव.

२. १२—१४.

१२०. **अबक** त्रिकोणाच्या **अब** आणि **अक** बाजू परस्पर बराबर आहेत; जर **अब** बाजू **ड** बिंदू पर्यंत वाढवून **बड**, **अब** बराबर केली, तर **कड** वरील चौरस, **अब** वरील चौरस आणि **बक** वरील दुपट चौरस ह्यां बराबर होतो.

१२१. कोणत्याही चौकोनांत दोनही कर्णांवरील चौरस, समोरासमोरील बाजूंचे मध्य बिंदु सांधणाऱ्या रेघांवरील चौरसांच्या बेरजेच्या दुपटीबराबर असतात.

१२२. कोणत्याही चौकोनाच्या चारही बाजूंवरील चौरसांची बेरीज, कर्णांवरील चौरसांचे बेरजेपेक्षां त्यांचे मध्यबिंदु सांधणाऱ्या रेघेवरील चौपट चौरसानें अधिक असते.

१२३. एका वर्तुळाच्या **अब** व्यासांत **क** आणि **ड** बिंदु मध्यापासून समान अंतरावर घेतले आहेत, आणि परिघांतल्या कोणत्याही **ई** बिंदूपासून **ईक** आणि **ईड** रेघा काढल्या आहेत; तर **ईक** आणि **ईड** ह्यांवरील चौरस मिळून, **अक** आणि **अड** ह्यांवरील चौरसां बराबर आहेत असें दाखीव.

१२४. **अबक** काटकोन त्रिकोणाच्या **बक** कर्णावर **बडईक** चौरस काढला आहे; तर **अड** आणि **अक** ह्यांवरील चौरस मिळून, **ईअ** आणि **अब** ह्यांवरील चौरसां बराबर आहेत असें दाखीव.

१२५. **अबक** त्रिकोणांत **क** काटकोन आहे, आणि **अक** रेघेंतल्या एका **ड** बिंदूपासून **अब** रेघेवर **डई** लंब काढला आहे; तर

अब, अई काटकोन चौकोन अक, अड काटकोन चौकोना बरोबर आहे असें दाखीव.

१२६. काटकोन त्रिकोणांत काटकोना पासून कर्णावर लंब काढला आहे; तर लंबावरील चौरस कर्णाच्या दोनखंडांच्या काटकोन चौकोना बरावर आहे असें दाखीव.

१२७. अबक त्रिकोणांत ब आणि क लघुकोन आहेत; जर अक आणि अब ह्यांवर समोरील कोनांपासून काढलेले लंब त्यांस ई आणि फ बिंदूशीं मिळतात; तर बक वरील चौरस, अब, बफ काटकोन-चौकोन आणि अक, कई काटकोन चौकोन ह्यांबराबर आहे असें दाखीव.

३. १—१५.

१२८. एकमेकास क बिंदूंत छेदणाऱ्या दोन वर्तुळांचे अ आणि ब मध्यबिंदु आहेत; क बिंदूंतून डकई आणि फकग रेघा अशा काढल्या आहेत कीं त्या अब रेघेशीं समान कोन करितात व त्यांचीं टोंकें वर्तुळाच्या परिघांत आहेत; तर डई, फग बराबर आहे असें दाखीव.

१२९. जर दोन स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांत दोन समांतर व्यास काढले, तर व्यासांचीं उलट सुलट टोंकें आणि स्पर्शबिंदु हे एकाच रेघेंत येतात.

१३०. तीन वर्तुळें एकमेकांस बाहेरून अ, ब, क, बिंदूंशीं स्पर्श करितात; अ बिंदूपासून अब आणि अक रेघा बक वर्तुळास ड आणि ई बिंदूंशीं मिळत पर्यंत वाढविल्या आहेत; तर डई रेघ बक वर्तुळाचा व्यास आहे, आणि ती दुसऱ्या दोन वर्तुळांचे मध्य बिंदु सांधणाऱ्या रेघेशीं समांतर आहे असें दाखीव.

३. १६—१९.

१३१. वर्तुळाच्या व्यासाच्या टोंकांवर दोन स्पर्शरेघा काढल्या आहेत, आणि त्या, तिसऱ्या स्पर्शरेघेचा अब भाग कापतात. जर क वर्तुळाचा मध्यबिंदु आहे, तर अकब कोन काटकोन आहे असें दाखीव.

१३२. एका चौकोनाच्या चार बाजू वर्तुळास स्पर्श करितात; तर

त्याच्या समोरासमोरच्या दोन बाजूंची बेरीज दुसऱ्या दोन बाजूंच्या बेरजे बराबर आहे असें दाखीव.

१३३. **अबड** आणि **अकई** ह्या दोन रेघा एका वर्तुळास **ब** आणि **क** बिंदूशीं स्पर्श करितात; आणि जर **डई** सांधून ती, **बड** आणि **कई** ह्यांच्या बेरजे बराबर आहे; तर **डई** वर्तुळास स्पर्श करिते असें दाखीव.

१३४. वर्तुळांत एकमेकींवर लंब अशा दोन त्रिज्या वाढविल्या असतां, एका स्पर्शरेघेस कापतात; तर त्या दोन छेदनबिंदूंपासून वर्तुळास काढलेल्या स्पर्शरेघा परस्पर समांतर आहेत असें दाखीव.

१३५. एका अर्धवर्तुळाचा **अब** व्यास आहे, आणि **क** मध्यबिंदु आहे; तर अर्धवर्तुळांत काढलेल्या वर्तुळाचा **ओ** मध्यबिंदु, **क** बिंदूपासून आणि अर्धवर्तुळास **अब** शीं समांतर काढलेल्या स्पर्शरेघेपासून समान अंतरावर आहे असें दाखीव.

१३६. एका वर्तुळाचा **क** मध्यबिंदु आहे, **कअ** त्रिज्या आहे, आणि **कअ** वर लंब असणाऱ्या त्रिज्येंत **ब** एक बिंदु आहे; **अब** सांध आणि ती वर्तुळास दुसऱ्या बाजूस **ड** बिंदूशीं मिळे पर्यंत वाढीव. जर **ड** बिंदूशीं स्पर्श करणारी रेघ **कब** रेघेस **ई** बिंदूंत मिळते, तर **बडई** त्रिकोण समद्विभुज आहे असें दाखीव.

१३७. एका वर्तुळाचा **बअ** व्यास **प** बिंदूपर्यंत वाढवून **अप** रेघ त्रिज्ये बराबर कर; **अ** बिंदूंतून **अईड** स्पर्शरेघ काढ, आणि **प** बिंदूपासून वर्तुळास **क** बिंदूशीं स्पर्श करणारी आणि पहिल्या स्पर्शरेघेस **ई** बिंदूंत छेदणारी **पईक** रेघ काढ; **बक** सांध आणि ती **अईड** रेघेस **ड** बिंदूशीं मिळे पर्यंत वाढीव; तर **डईक** त्रिकोण समभुज आहे असें दाखीव.

३. २०—२२.

१३८. **अओब** एक त्रिकोण आहे; **क** आणि **ड** हे बिंदु **बओ** आणि **अओ** रेघांत असे घेतले आहेत, कीं **ओडक** कोन **ओबअ** कोनाबराबर आहे; तर **अबकड** चौकोना भोंवतीं वर्तुळ निघेल असें दाखीव.

१३९. **अबकड** चौकोन एका वर्तुळांत काढला आहे, आणि **अब** आणि **कड** बाजू वाढविल्या असतां, त्या **ओ** बिंदूशीं मिळतात; तर **अओक** आणि **बओड** हे त्रिकोण समकोण आहेत असें दाखीव.

१४०. अ,ब,क,ड हे चार बिंदु वर्तुळाच्या परिघांत अनुक्रमानें घेतले आहेत; आणि अब आणि कड रेघा प बिंदूशीं मिळत पर्यंत वाढविल्या आहेत; आणि अड आणि बक रेघा स बिंदूशीं मिळत पर्यंत वाढविल्या आहेत; तर अपक आणि असक हे कोन दुभागणाऱ्या रेघा परस्परांवर लंब आहेत असें दाखीव.

३. २२—३०.

१४१. एका वर्तुळाच्या परिघांतल्या क बिंदूपासून काढलेल्या अकब आणि डकई रेघा वर्तुळास ब आणि ई बिंदूंत कापतात; तर अकई आणि डकब ह्या समोरासमोरील कोनांस दुभागणारी रेघ वर्तुळास ब आणि ई बिंदूंपासून समान अंतरावर मिळते असें दाखीव.

१४२. एका वर्तुळाचा अब व्यास आहे, आणि परिघांत ड असा एक बिंदु घेतला आहे, कीं डब कौंस डअ कौंसाच्या अर्धापेक्षां कमी आहे; तर अब व्यासाच्या एका अंगास डई ज्या अशी काढ कीं ईअ कौंस बड कौंसाची तिपट होईल.

१४३. ओअ, ओब, ओक ह्या तीन ज्या एका वर्तुळांत अशा काढल्या आहेत कीं अओब कोन बओक कोना बराबर आहे, आणि ओअ ज्या, ओब ज्येपेक्षां मध्या जवळ आहे. ब पासून ओअ वर काढलेला लंब, तीस प बिंदूशीं मिळतो; आणि ओक वाढवून तीवर काढलेला लंब, तीस स बिंदूशीं मिळतो; तर अप, कस बराबर आहे असें दाखीव.

१४४. अओब आणि कओड हे एका वर्तुळाचे परस्परावर लंब असे व्यास आहेत; ई बिंदु अक कौंसावर आहे, आणि ईफग ज्या, कओड व्यासास फ मध्यें मिळून, तिचा ईफ भाग वर्तुळाच्या त्रिज्ये बराबर आहे; तर बग कौंस अई कौंसाची तिपट आहे असें दाखीव.

३. ३१.

१४५. अबक त्रिकोणा भोंवती काढलेल्या वर्तुळाचा व्यास अब आहे, आणि ईफ व्यास बक शीं समांतर आहे; तर ईब आणि फब रेघा ब बिंदूशीं होणारा आंतील आणि बाहेरील कोन अनुक्रमें दुभागतात असें दाखीव.

१४६. जर अबक त्रिकोणाच्या बक आणि अब बाजूंवर अड आणि कई लंब काढले, आणि डई सांधली; तर अडई आणि अकई हे कोन परस्पर बराबर होतात असें दाखीव.

१४७. अबक आणि अबड हीं दोन वर्तुळें एकमेकास अ आणि ब बिंदूंत छेदितात; आणि अक, अड हे दोन व्यास आहेत; तर कड रेघ ब बिंदूंतून जाते असें दाखीव.

१४८. अड हा एक वर्तुळाचा व्यास आहे; ब आणि क बिंदु अड च्या एकाच अंगास असून परिघावर आहेत; बक रेघ क बिंदूंतून वाढवून, तीवर ड बिंदूपासून काढलेला लंब, तीस ई बिंदूशीं मिळतो; तर अड वरील चौरस, अब, बक, कड ह्यांवरील चौरसांच्या बेरजे पेक्षां दुपट बक, कई काटकोन चौकोनानें मोठा आहे असें दाखीव.

१४९. अब एका अर्ध वर्तुळाचा व्यास आहे, प परिघावर एक बिंदु आहे, आणि पम, अब वर लंब आहे; अम आणि बम ह्या रेघा व्यास करून त्यांवर दोन अर्ध वर्तुळें काढलीं आहेत, आणि अप, बप रेघा शेवटल्या दोन अर्ध वर्तुळांच्या परिघांस स आणि र बिंदूंशीं मिळतात; तर सर त्या दोघांस साधारण स्पर्शरेघ आहे असें दाखीव.

१५०. अब आणि अक ह्या दोन रेघांत ब आणि क दिलेले बिंदु आहेत; बड रेघ अक रेघेवर लंब काढली आहे; आणि डई, अब वर लंब काढली आहे. असेंच कफ, अब वर लंब आहे, आणि फग, अक वर लंब आहे; तर ईग, बक शीं समांतर आहे असें दाखीव.

१५१. अर्ध वर्तुळाचा अब व्यास आहे, आणि ड आणि ई त्याच्या परिघावर दोन बिंदु आहेत. जर अ आणि ब बिंदु ड आणि ई बिंदूंशीं सांधून होणाऱ्या ज्या फ आणि ग बिंदूंत छेदितात, तर फग वाढविली असतां, ती अब वर लंब होईल.

३. ३२—३४.

१५२. एका वर्तुळाची अब ज्या आहे, आणि अ बिंदूशीं अड स्पर्शरेघ आहे. अब शीं डपस रेघ समांतर काढली आहे, आणि ती वर्तुळाच्या परिघास प आणि स बिंदूंशीं मिळते; तर पअड त्रिकोण सअब त्रिकोणाशीं समकोण आहे असें दाखीव.

१५३. अबडह आणि अबग हीं दोन वर्तुळें एकमेकास अ आणि ब बिंदूंत छेदितात; ब पासून एका वर्तुळांत असणारी आणि दुसऱ्या वर्तुळास स्पर्श करणारी अशी बड रेघ काढली आहे, आणि अ पासून प्रत्येक वर्तुळांत काढलेली ज्या, त्यांस ग आणि ह बिंदूंशीं मिळते; तर बग, डह शीं समांतर आहे असें दाखीव.

१५४. दोन वर्तुळें एकमेकास अ आणि ब बिंदूंत छेदितात, आणि कोणत्याही एका वर्तुळाच्या परिघांतल्या प बिंदूपासून काढलेल्या पअ आणि पब ज्या दुसऱ्या वर्तुळास क आणि ड बिंदूंत छेदितात; तर कड रेघ प बिंदूशीं काढलेल्या स्पर्शरेघेशीं समांतर आहे असें दाखीव.

३. ३५—३७.

१५५. दोन वर्तुळें एकमेकास अ आणि ब बिंदूंत छेदितात; तर अब रेघ वाढविली असतां, ती दोहीं वर्तुळांस स्पर्श करणाऱ्या रेघेस दुभागते असें दाखीव.

१५६. अबक त्रिकोणांत बक वर अड लंब काढली आहे, आणि अब वर कई लंब काढली आहे; तर बक, बड काटकोनचौकोन बअ, बई काटकोन चौकोना बरावर आहे असें दाखीव.

१५७. अबकड आणि ईबकफ ह्या दोन वर्तुळांस अई आणि डफ साधारण स्पर्शरेषा आहेत, आणि तीं एकमेकास ब आणि क बिंदूंत छेदितात. बक ज्या वाढवून ती, त्या स्पर्शरेषांस ग आणि ह बिंदूंत छेदिते; तर गह वरील चौरस, अई अथवा डफ रेघे वरील चौरसापेक्षां बक वरील चौरसानें मोठा आहे असें दाखीव.

४. १—४.

१५८. अबक त्रिकोणांत काढलेलें वर्तुळ अब आणि अक बाजूंस ड आणि ई बिंदूंशीं स्पर्श करतें, आणि अ पासून वर्तुळाच्या मध्यापर्यंत काढलेली रेघ परिघास ग बिंदूंत छेदते; तर अडई त्रिकोणांत काढलेल्या वर्तुळाचा ग मध्य आहे असें दाखीव.

१५९. एका चौकोनाच्या समोरासमोरील दोन बाजूंची बेरीज दुसऱ्या दोन बाजूंच्या बेरजे बरावर आहे, आणि त्याचा प्रत्येक कोन

दोन काटकोनांपेक्षां कमी आहे; तर त्या चौकोनांत वर्तुळ काढतां येईल असें दाखीव.

१६०. हपल आणि सपम हीं दोन वर्तुळें एकमेकास बाहेरून स्पर्श करितात, आणि हस आणि लम त्यांस साधारण स्पर्शरेषा आहेत; तर हल आणि सम सांधून, हसमल चौकोनांत वर्तुळ काढतां येईल असें दाखीव.

४. ५—९.

१६१. जर अबक त्रिकोणाचें बक पायाशीं डई समांतर काढली, तर अबक आणि अडई त्रिकोणां भोंवतीं काढलेल्या वर्तुळांस साधारण स्पर्शरेषा आहे असें दाखीव.

१६२. जर एका त्रिकोणांत आणि त्या भोंवतीं काढलेल्या वर्तुळांचा एकच मध्य बिंदु आहे, तर तो त्रिकोण समभुज आहे असें दाखीव.

१६३. जर एका त्रिकोणांत आणि त्या भोंवतीं काढलेल्या वर्तुळांचे मध्यबिंदु सांधणारी रेघ त्या त्रिकोणाच्या एका कोनांतून जाते, तर तो त्रिकोण समद्विभुज आहे असें दाखीव.

१६४. एका वर्तुळांत अबकड चौकोन काढला आहे, आणि अड, बक बाजू वाढवून, त्या ई बिंदूशीं मिळतात; तर ईकड त्रिकोणा भोंवतीं काढलेल्या वर्तुळास ई बिंदूशीं काढलेली स्पर्शरेषा, अब शीं समांतर आहे असें दाखीव.

१६५. अब आणि कड समांतर रेघा आहेत, आणि त्यांचीं शेवटें सांधणाऱ्या रेघा, ई बिंदूंत एकमेकीस छेदितात; तर अबई आणि कडई त्रिकोणां भोंवतीं काढलेलीं वर्तुळें एकमेकास स्पर्श करितात असें दाखीव.

१६६. अबक त्रिकोणांत काढलेल्या वर्तुळाचा मध्यबिंदु ओ आहे, आणि अओ रेघ वाढवून ती, त्रिकोणा भोंवतीं काढलेल्या वर्तुळास फ बिंदूशीं मिळते; तर फब, फओ, फक ह्या रेघा परस्पर बरोबर आहेत असें दाखीव.

१६७. वर्तुळांत काढलेल्या चौकोनाच्या समोरासमोरील बाजू प आणि स बिंदूंशीं मिळत पर्यंत वाढविल्या आहेत; आणि चौकोना बाहेर

झालेल्या दोहों त्रिकोणां भोंवतीं काढलेलीं वर्तुळें पुनः र बिंदूशीं मिळतात; तर प, र, स बिंदु एकाच रेषेंत आहेत असें दाखीव.

१६८. **अबक** त्रिकोणाचा **अकब** कोन दुभागणारी रेघ, आणि **अब** पायाच्या मध्य बिंदूंतून त्यावर काढलेला लंब, ह्या दोन रेघा एकमेकीस ड बिंदूंत छेदितात; तर **अकब** आणि **अडब** हे दोन कोन मिळून दोन काटकोनां बराबर आहेत असें दाखीव.

१६९. **अकडब** अर्ध वर्तुळाचा व्यास **अब** आहे, आणि त्यांतील **अड** व **बक** ज्या एकमेकीस **ई** बिंदूंत छेदितात; तर **कडई** त्रिकोणा भोंवतीं काढलेलें वर्तुळ पहिल्या वर्तुळास काटकोनानें छेदितें, म्हणजे त्यांच्या प्रत्येक छेदनबिंदूंतून प्रत्येक वर्तुळास काढलेल्या स्पर्शरेषा परस्पर लंब होतात असें दाखीव.

१७०. दिलेल्या **अबकड** चौकोनाचे कर्ण ओ बिंदूंत एकमेकास छेदितात; तर **ओअब**, **ओबक**, **ओकड**, **ओडअ** ह्या त्रिकोणां भोंवतीं काढलेल्या वर्तुळांचे मध्यबिंदु सांधल्यानें होणारी आकृति समांतरभुज चौकोन होतें असें दाखीव.

१७१. **अबक** त्रिकोणा भोंवतीं एक वर्तुळ काढलें आहे; **क** बिंदूशीं काढलेली स्पर्शरेषा, वाढविलेल्या **अब** बाजूस ड बिंदूशीं मिळते; ज्या वर्तुळाचा ड मध्य बिंदु आणि **डक** त्रिज्या आहे तें वर्तुळ **अब** रेघेस **ई** बिंदूशीं मिळतें; तर **ईक** रेघ **अकब** कोन दुभागतें असें दाखीव.

१७२. **अबक** समद्विभुज त्रिकोणांत **अब**, **अक** बराबर आहे, आणि त्याभोंवतीं एक वर्तुळ काढलें आहे; अपासून कोणतीही काढलेली रेघ **बक** पायास ड बिंदूशीं, आणि वर्तुळास ई बिंदूशीं मिळते; तर ब, ड, ई बिंदूंतून जाणारें वर्तुळ, **अब** रेघेस स्पर्श करितें असें दाखीव.

१७३. दिलेल्या वर्तुळाची **अक** एक ज्या आहे; **ब** आणि **ड** हे दोन बिंदु ज्येमध्यें किंवा वाढविलेल्या ज्येमध्यें आहेत; आणि **ब** आणि ड बिंदूंतून जाणारें वर्तुळ दिलेल्या वर्तुळास ई बिंदूशीं स्पर्श करितें; तर **अईब** कोन **कईड** कोनाबराबर आहे असें दाखीव.

१७४. दिलेल्या वर्तुळाचा मध्य बिंदु दिलेल्या दोन रेघांपासून समान अंतरावर आहे; तर त्या दोन रेघांस स्पर्श करणारें असें एक वर्तुळ

काढ, कीं त्यानें कापलेल्या पहिल्या वर्तुळाच्या खंडांतील कोन दिलेल्या कोना बराबर होईल.

१७५. दिलेल्या काटकोन चौकोना भोंवतीं वर्तुळ काढ.

१७६. वर्तुळाच्या कोणत्याही दोन व्यासांच्या टोंकांशीं काढलेल्या स्पर्शरेषांनीं झालेला समांतरभुज चौकोन समभुज असतो.

४. १०.

१७७. ४.१० च्या आकृतींत असें दाखीव कीं विवक्षित धर्माचे त्रिकोण दोन आहेत, आणि असा एक समद्विभुज त्रिकोण आहे कीं त्याचे समान कोन प्रत्येकीं तिसऱ्या कोनाचा तृतीय भाग आहे.

१७८. ४.१० च्या आकृतींत दोनही वर्तुळें छेदण्याचा दुसरा बिंदु ई आहे; तर असें दाखीव कीं डई, डक बराबर आहे.

१७९. ४.१० च्या आकृतींत दोन्ही वर्तुळांचा दुसरा छेदन बिंदु ई आहे; अई, कई सांध, आणि अई, बड रेघा ग मध्यें मिळत पर्यंत वाढीव; तर कडगई समांतरभुज चौकोन आहे असें दाखीव.

४. ११—१६.

१८०. नियमित पंचकोणाच्या जवळ जवळच्या दोन बाजूंचीं टोंकें सांधून, पांच रेघा काढल्या, तर त्यांच्या छेदनबिंदूंनीं दुसरा एक नियमित पंचकोण निघतो.

१८१. अबकडई नियमित पंचकोण आहे; अक, अई सांधून, त्यांचा छेदन बिंदु फ आहे; तर असें दाखीव कीं अब आणि बफ ह्यांच्या बेरजे बराबर अक आहे.

१८२. वर्तुळांत काढलेल्या समभुज त्रिकोणापासून नियमित षट्कोण काढ; आणि कृतीवरूनच असें दाखीव कीं षट्कोणाची बाजू वर्तुळाच्या त्रिज्ये बराबर असते, आणि तो समभुजत्रिकोणाची दुपट असतो.

१८३. दिलेल्या वर्तुळांत असा एक त्रिकोण काढ कीं त्याचे कोन २,५,८ ह्या अंकांच्या प्रमाणांत होतील.